CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE EUCLIDEE

Cons. il piano euclideo $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$

<u>Def.</u> Una CONICA in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ è il luogo degli zeri $\mathcal{C}$ di un polinomio di secondo grado:

$$\mathcal{C}: \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0 \qquad (*)$$

se $A_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ è la matrice simmetrica associata a $\mathcal{C}$, l'equazione $(*)$ si scrive

$$(1 \ x \ y)\, A_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Due coniche $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subseteq \mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ si dicono CONGRUENTI se $\exists$ un'isometria $f: \mathbb{E}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ t.c. $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$

Ricordiamo che f è un'isometria se si può scrivere nella forma

$$f(x,y) = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b, \quad \text{con } M \in O(2,\mathbb{R}), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Che legame c'è tra l'equazione di $\mathcal{C}$ e quella di $\mathcal{C}'$?

Sia $(x', y') = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b$, allora si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{M^{-1}}_{=N}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \underbrace{- M^{-1}b}_{c}$$

$$= N\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + c \quad ; \text{ se } \tilde{N} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline c_1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{N}} \\ c_2 & & \end{array}\right)$$

con $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

la coppia (x,y) verifica (*) $\Longleftrightarrow$ la coppia (x',y') verifica

$$(1\ x'\ y')\ {}^t\tilde{N} A_C \tilde{N} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

Analogamente al caso affine, sono invarianti sotto isometrie:

- rango A_C
- rango $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$; infatti, se $B = {}^t\tilde{N} A_C \tilde{N}$, si ha $B_0 = {}^tN A_C N$
- nel caso $\det A_0 \neq 0$, il segno $\operatorname{sgn} \det A_0$ è invariante

<u>Def.</u> Come nel caso affine, possiamo dare le definizioni di

- CONICA NON DEGENERE ($\det A_C \neq 0$)
- CONICA DEGENERE ($\det A_C = 0$; SEMPLICEMENTE se $\operatorname{rg} A_C = 2$, DOPPIAMENTE $\operatorname{rg} A_C = 1$)
- CONICA A CENTRO: $\det A_0 \neq 0$
  - ELLISSE $\det A_0 > 0$
  - IPERBOLE $\det A_0 < 0$
- PARABOLA: $\det A_0 = 0$

TEOREMA: Ogni conica euclidea $C \subseteq \mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ è congruente ad una delle seguenti:

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a \geq b > 0$ ELLISSE
  se $a = b$ CIRCONFERENZA
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ ELLISSE A PUNTI NON REALI
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ con $a \geq b > 0$ ELLISSE DEGENERE
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > 0$, $b > 0$ IPERBOLE
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ con $a \geq b > 0$ IPERBOLE DEGENERE
- $y^2 - 2px = 0$ con $p > 0$ PARABOLA
- $y^2 - a^2 = 0$ $a > 0$ PARABOLA DEGENERE (RETTE PARALLELE)
- $y^2 + a^2 = 0$ $a > 0$ PARABOLA DEGENERE A PUNTI NON REALI
- $y^2 = 0$ CONICA DOPPIAMENTE DEGENERE (RETTA DOPPIA)

Inoltre, le coniche elencate sono a due a due non congruenti.

Dimostrazione:
è analoga al caso affine, con la differenza che la scelta della matrice M deve essere fatta in $O(2, \mathbb{R})$;

Passo 1: anche in questo caso possiamo eliminare il termine $2a_{12}xy$, questa volta usando il Teorema Spettrale, che ci permette di diagonalizzare la matrice simmetrica $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$:

$$\exists M \in O(2,\mathbb{R}) \text{ t.c. } \underbrace{{}^tM}_{=M^{-1}} A_0 M = B_0$$

con B_0 matrice diagonale; gli elementi diagonali di B_0 sono gli AUTOVALORI di A_0

Possiamo supporre, quindi, che la conica C abbia equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

con a_{11} e a_{22} non entrambi nulli.

Passo 2: eliminazione eventuale di termini lineari e termine costante:

si può ripetere esattamente la stessa procedura del passo 2 del caso affine, perché vengono coinvolte solo traslazioni, che sono isometrie in particolare.

Si arriva così a delle equazioni del tipo:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + c_{00} = 0, \qquad \text{oppure}$$

$$a_{22}y^2 + d_{00} = 0, \qquad \text{oppure}$$

$$a_{22}y^2 + 2a_{01}x = 0$$

A meno di uno scambio degli assi cartesiani e a meno di una moltiplicazione per uno scalare non nullo, otteniamo tutte le equazioni dell'enunciato.

Osserviamo che il Passo 3 del caso affine coinvolge trasformazioni che non sono ortogonali, quindi la normalizzazione dei coefficienti nel caso euclideo non si può applicare.

GEOMETRIA DELLE CONICHE EUCLIDEE NON DEGENERI

ELLISSI

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad a \geq b > 0$

$a = b$ CIRCONFERENZA

Si ha: $|x| \leq a$, $|y| \leq b$

- $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$ VERTICI
- C è simmetrica risp. a $(0,0)$ e risp. 2 assi cartesiani
- $(\pm c, 0)$ con $c := \sqrt{a^2 - b^2}$ FUOCHI F_1, F_2
- $e := \frac{c}{a}$ ECCENTRICITÀ, $0 \leq e < 1$

$x = \pm \frac{a}{e}$ DIRETTRICI l_1, l_2

IPERBOLI

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad a > 0 \quad b > 0$

$a = b$: IP. EQUILATERA

Si ha $|x| \geq a$ e $|y| \leq \frac{b}{a}|x|$

le rette $y = \pm \frac{b}{a} x$ ASINTOTI

$(\pm a, 0)$ VERTICI

- C è simmetrica risp. a $(0,0)$ e risp. 2 assi cartesiani
- $(\pm c, 0)$ con $c := \sqrt{a^2 + b^2}$ FUOCHI F_1, F_2
- $e = \frac{c}{a}$ ECCENTRICITÀ, $e > 1$

$x = \pm \frac{a}{e}$ DIRETTRICI l_1, l_2

PARABOLE

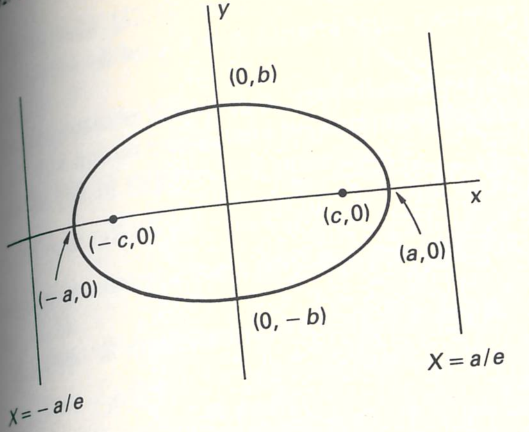
$y^2 - 2px = 0$ $\quad p > 0$

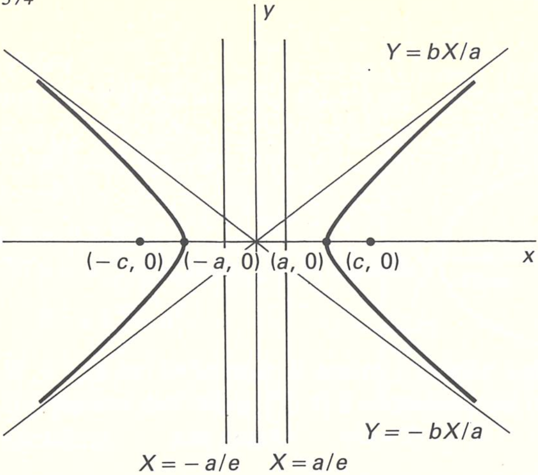
si ha : $x \geq 0$

$(0,0)$ VERTICE

- C simmetrica risp. asse x
- $(p/2, 0)$ FUOCO
- $e := 1$ ECCENTRICITÀ

$x = -p/2$ DIRETTRICE


y
(0,b)
x
(c,0)
(− c,0)
(a,0)
(− a,0)
(0, − b)
X = a/e
X = − a/e



Figura

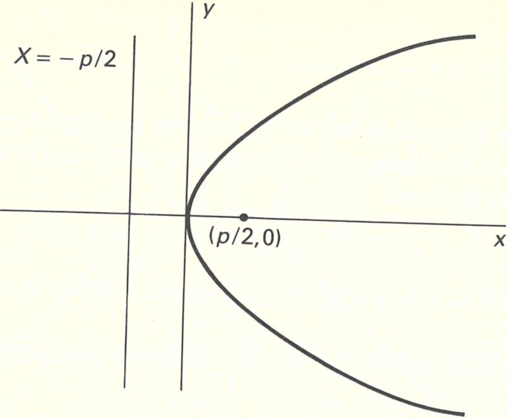


Figura 32.3

PROPRIETÀ FOCALI DI ELLISSI E IPERBOLI

PROPOSIZIONE: L'ellisse è il luogo dei punti $P \in \mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ tali che

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

L'iperbole è il luogo dei punti $P \in \mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ tali che

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Dim. Esercizio

PROPRIETÀ METRICHE DI ELLISSI, IPERBOLI E PARABOLE

PROP.:
L'ellisse, l'iperbole e la parabola sono i luoghi dei punti $P \in \mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ t.c.

$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, \ell_1)} = \frac{d(P, F_2)}{d(P, \ell_2)} = \frac{d(P, F)}{d(P, \ell)} = e.$$

Dim. Esercizio