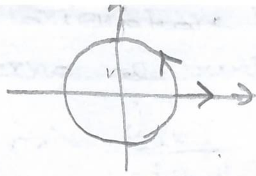
Es. $A = B_1(0)$

$\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

↳ è un'orientazione positiva



$n(t) = (\cos t, \sin t)$

$n(0) = (1, 0)$

↳ punta verso l'esterno.

Calcoliamo l'integrale curvilineo

$$\int_{\partial A} f \cdot n_1 \, ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \overbrace{\frac{y'(t)}{\|\varphi'(t)\|}}^{n_1} \cdot \|\varphi'(t)\| \, dt = \qquad (3)$$

$$= \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot y'(t) \, dt = \int_{\partial A^+} f \, dy$$

↳ lo penso come un integrale di 2ª sp.. della forma $\omega = f\,dy$, quindi devo specificare l'orientazione.

In maniera analoga trovo

$$\int_{\partial A} f \cdot n_2 \, ds = - \int_{\partial A^+} f \, dx \qquad (4)$$

Unendo le formule (1) e (2) (del Lemma 3) e le formule (3) e (4) appena trovate, ho che

$$\int_A \partial_x f \, dx\, dy = \int_{\partial A^+} f \, dy \qquad (1)$$

$$\int_A \partial_y f \, dx\, dy = - \int_{\partial A^+} f \, dx \qquad (2)$$

Consideriamo ora la forma differenziale lineare

$\omega(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$, allora si scelgo

in (1) $f(x,y) = N(x,y)$ $\qquad \int_A \partial_x N(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial A^+} N \, dy$

in (2) $f(x,y) = M(x,y)$ $\qquad \int_A \partial_y M(x,y)\, dx\, dy = - \int_{\partial A^+} M \, dx$.

Se sottraggo membro a membro trovo la formula

$$\int_{\partial A^+} \omega = \int_{\partial A^+} M\,dx + N\,dy = \int_A \partial_x N(x,y) - \partial_y M(x,y) \, dx\, dy$$

Applicazioni delle formule (1) e (2).

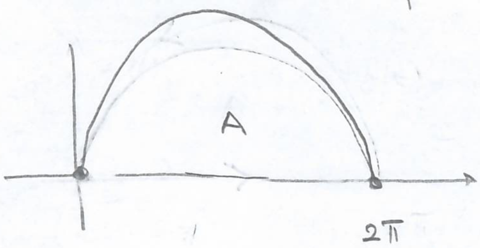
Se si pone $f(x,y) = x$ in (1) o $f(x,y) = y$ in (2) si trova

$$m(A) = \int_A 1 \, dx\, dy = \int_A \partial_x(x) \, dx\, dy = \int_{\partial A^+} x \, dy. \quad \leftarrow (1)$$

$$= \int_A \partial_y(y) \, dx\, dy = \int_{\partial A^+} -y \, dx \quad \leftarrow (2)$$

Es. Calcoliamo l'area racchiusa dalla cicloide di equazioni parametriche

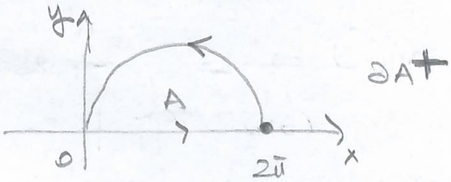
$$\gamma: \begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$



e dall'asse delle x.

dim: Per applicare la formula

$$m(A) = -\int_{\partial A^+} y\, dx$$



devo definire una curva regolare a tratti che orienti positiv. ∂A (cioè in verso antiorario).

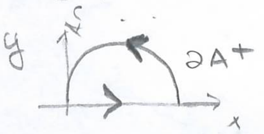
Vedo che γ percorre la curva in senso orario

pnd

Per il tratto orizzontale considero la param.

$\varphi(t) = (t, 0) \qquad 0 \le t \le 2\pi$ che ha l'orientazione giusta.

$$m(A) = -\int_{\partial A^+} y\, dx = -\left[\int_{\substack{\text{cicloide}\\ \text{orient}\\ \text{in senso}\\ \text{antiorario}}} y\, dx + \int_{\substack{\text{segmento}\\ \text{orizz. orient.}\\ \text{da sx verso dx}}} y\, dx\right] =$$



$$= -\left[-\int_{\substack{\text{cicloide}\\ \text{orient in}\\ \text{senso orario}}} y\, dx + \int_{\substack{\text{segm}\\ \text{orizz orient}\\ \text{da sx verso dx}}} y\, dx\right] =$$

$$= -\left[-\int_0^{2\pi} \underbrace{(1-\cos t)}_{y}\underbrace{(1-\cos t)}_{\dot{x}}\, dt + \int_0^1 \underbrace{0}_{y} \cdot \overset{\dot{x}}{1}\, dt\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\, dt = \dots = 3\pi$$

Grazie a queste formule possiamo ridimostrare il Lemma di Poincaré per insiemi semplicemente connessi.

Teorema.

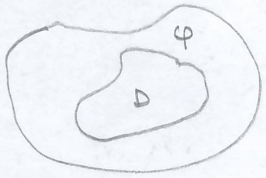
Sia A un aperto semplicemente connesso del piano. Allora ogni forma chiusa è esatta.

dim: $\omega(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ $\quad (\partial_x N = \partial_y M \leftarrow$ chiusa$)$.

Considero una curva chiusa $\varphi: [a,b] \to A$ regolare

Allora la curva φ racchiude un insieme $D \subseteq A$

Cioè $\partial D =$ sostegno di φ.



$$\int_{\partial D^+} \omega = \int_D (\partial_x N - \partial_y M)\,dx\,dy = 0$$ (ω chiusa) $\Rightarrow$ ω è esatta

(th. caratt.)

$$= \begin{cases} \int_\varphi \omega & \text{se } \varphi \text{ orienta positiv.} \\ -\int_\varphi \omega & \text{se } \varphi \text{ orienta negativ.} \end{cases} \Rightarrow \int_\varphi \omega = 0.$$

Oss:

$\gamma_2:\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

orienta positiv. per ∂D

$\gamma_1:\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$ → orienta negativ. per ∂D

$(y'(t), -x'(t)) = (\cos t, \sin t)$

↓

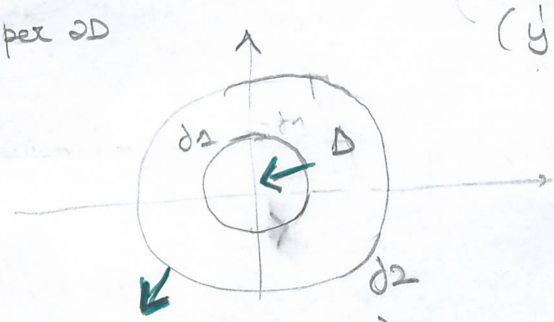
è diretto intern. a D

$\Rightarrow \gamma_1$ è un'orient. negativa per ∂D

$\omega = M\,dx + N\,dy$

chiusa in A

D dominio = tra γ_1 e γ_2



$n = (\cos t, \sin t)$

Sia $D \subset A$

$$= \int_{\partial D^+} \omega = \int_{\substack{\text{curva}\\\text{esterna}\\\text{percorsa}\\\text{in senso}\\\text{antiorario}}} \omega + \int_{\substack{\text{curva}\\\text{interna}\\\text{percorsa}\\\text{in senso}\\\text{orario}}} \omega = \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_1} \omega$$

$$= \int_D \partial_x N - \partial_y M = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

entrambe orientate in verso antiorario.

Oss: Si può dimostrare anche per curve chiuse omotope γ_1 e γ_0 che

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_0} \omega \qquad \text{con } \omega \text{ f.d. e chiusa}$$

modificando la dimostrazione del Lemma di Poincaré per insiemi sempl. connessi

$$\left(\begin{array}{l} I(\lambda) = \int_{\varphi(t,\lambda)} \omega \\ \frac{d}{d\lambda} I(\lambda) = 0 \\ \quad \text{la } \omega \text{ chiusa} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \varphi(t,0) = \gamma_0(t) \\ \varphi(t,1) = \gamma_1(t) \end{array} \right)$$

Teorema di Stokes nello spazio.

Introduciamo la nozione di bordo di una superficie.

Cons. una superficie param. regolare e semplice,

$$x : T \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad T \text{ aperto.}$$
$$(u,v) \longmapsto (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)).$$

e sia Σ il supporto della superficie.

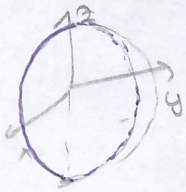
$\overline{\Sigma}$ → chiusura di Σ in $\mathbb{R}^3$

Def: Chiamiamo bordo di Σ l'insieme $\partial\Sigma = \overline{\Sigma} \setminus \Sigma$

Es: • Σ = cono privato del vertice $\qquad \partial\Sigma$ = vertice stesso

• Σ = emisfero destro della sfera di raggio R e centro l'origine

$\partial\Sigma$ = cerchio massimo passante per i poli



• Se Σ è un insieme di livello, allora Σ è un insieme chiuso, (Σ determ. da $F(x,y,z) = 0$ con F di classe C^1 allora Σ è la controimmagine attraverso F continua di $\{0\}$.

Quindi $\partial\Sigma = \overline{\Sigma} \setminus \Sigma = \emptyset$

es il paraboloide $\qquad F(x,y,z) = z - x^2 - y^2 = 0$

è tale che $\partial\Sigma = \emptyset$.

Def: Le superfici senza bordo e limitate si dicono chiuse.

Oss: chiedere che una superficie sia chiusa non implica solo chiedere che Σ sia un chiuso (in senso topologico) in $\mathbb{R}^3$ ma anche che sia limitato, ovvero un compatto in $\mathbb{R}^3$

Es: • La sfera è una superficie chiusa

• Il paraboloide non è una superficie chiusa perché non è limitato.

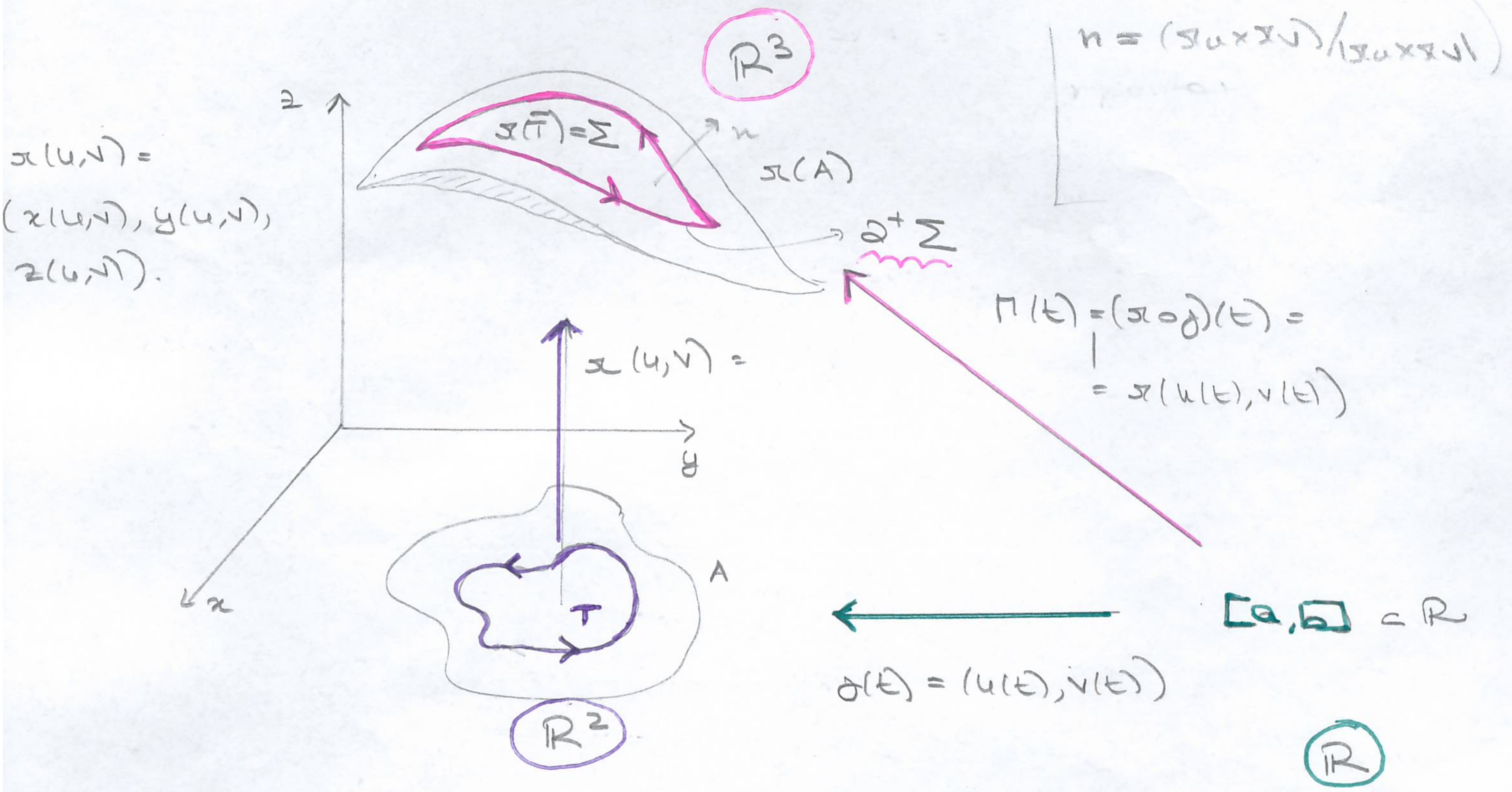
Cons. Σ una superficie semplice, regolare, orientabile e con bordo $\partial\Sigma$ costituito da una curva chiusa regolare a tratti

Dobbiamo definire, come nel caso di domini piani, cosa si intende per orientazione positiva di $\partial\Sigma$ rispetto all'orientazione di Σ.

Cons. una superficie regolare semplice definita su un aperto A (quindi orientabile) con parametrizzazione $x = x(u,v)$

<u>Def:</u> Un insieme D aperto, limitato e connesso si dice <u>dominio regolare</u> in $\mathbb{R}^2$ se la sua frontiera è il sostegno di una curva chiusa semplice e regolare a tratti. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$.

Consideriamo T un dominio regolare e tale che $\overline{T} \subset A$, cioè



la sua frontiera è il sostegno di una curva chiusa e regolare $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ e supponiamo che γ orienti positivamente la frontiera di T.

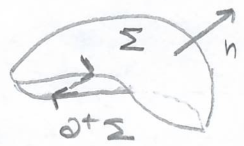
Definiamo la <u>curva nello spazio</u>

$$\hat{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad\qquad \Sigma = x(T)$$
$$t \longmapsto (x \circ \gamma)(t) \qquad\qquad \partial\Sigma = x(\partial T)$$

è una curva regolare in $\mathbb{R}^3$ e diremo che orienta positivam. $\partial\Sigma$ (scriveremo $\partial^+\Sigma$).

Ora: Un altro modo equivalente. Considero un verso per la normale $\underline{n}$ che determina i due lati, uno per convenzione è quello positivo, quello verso il quale punta n, e negativo l'altro.
Diremo che $\partial\Sigma$ è orientato positivam. rispetto a Σ se, percorrendo $\partial\Sigma$ mantenendosi sul lato positivo di Σ si lasciano i punti di Σ alla sinistra

→ con la scelta $n = \dfrac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$ nell'approccio di prima.



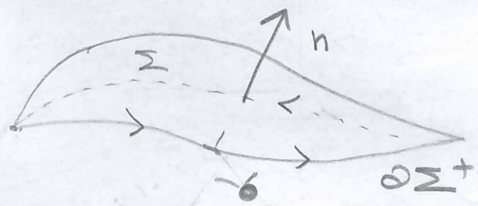
Teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$

Sia Σ come prima e sia $F = (P, Q, R)$ un campo vettoriale di classe $C^1(B)$, dove B è un aperto di $\mathbb{R}^3$ con $\Sigma \subset B$. Allora vale la formula

$$\iint_\Sigma (\mathrm{rot}\, F, n)\, d\sigma = \int_{\partial^+\Sigma} \omega$$

dove $\omega(x,y,z) = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ e

$$n = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$$



dim: Cons. la seguente parametrizzazione di Σ

$$r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad \text{con } (u,v) \in T$$

Abbiamo che

$$\iint_\Sigma (\mathrm{rot}\, F, n)\, d\sigma = \iint_T \left(\mathrm{rot}\, F; \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}\right) \|r_u \times r_v\|\, du\, dv =$$

$$= \iint_T (\mathrm{rot}\, F, r_u \times r_v)\, du\, dv \;=$$

Usando le notazioni

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \partial_u y \cdot \partial_v z - \partial_v y \cdot \partial_u z$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \partial_u z\, \partial_v x - \partial_u x \cdot \partial_v z$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \partial_u x\, \partial_v y - \partial_u y\, \partial_v x$$

$$= \iint_T (\partial_y R - \partial_z Q)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + (\partial_z P - \partial_x R)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + (\partial_x Q - \partial_y P)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, du\, dv$$

Vediamo l'altro termine

$$\int_{\partial^+\Sigma} \omega =$$

Cons. la param. $\hat{\gamma}:[a,b]\to R^3$ $\qquad (\gamma(t)=(u(t),v(t)))$

$$\hat{\gamma}(t) = (x\circ\gamma)(t) = x(u(t),v(t)) = (x(u(t),v(t)),\, y(u(t),v(t)),\, z(u(t),v(t)))$$
$$= (\hat{x}(t),\, \hat{y}(t),\, \hat{z}(t))$$

$\hat{x}(t) = (x\circ\gamma)(t)$

$\hat{y}(t) = (y\circ\gamma)(t)$ $\qquad$ è una param. di $\partial^+\Sigma$

$\hat{z}(t) = (z\circ\gamma)(t)$

$$= \int_a^b P(\hat{\gamma}(t))\cdot \dot{\hat{x}}(t) + Q(\hat{\gamma}(t))\,\dot{\hat{y}}(t) + R(\hat{\gamma}(t))\,\dot{\hat{z}}(t)\, dt \quad (*)$$

Consideriamo il primo termine $\left(\int_{\partial^+\Sigma} P\,dx\right)$

$$\int_a^b P(\hat{\gamma}(t))\,\dot{\hat{x}}(t)\,dt = \int_a^b P(x\circ\gamma)(t)\big(\partial_u x(\gamma(t))\cdot\dot{u}(t) + \partial_v x(\gamma(t))\dot{v}(t)\big)dt$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \partial_u x(\gamma(t))\,\dot{u}(t) + \partial_v x(\gamma(t))\,\dot{v}(t)$$

$$= \int_a^b (P\circ x)(\underbrace{\gamma(t)}_{(u(t),v(t))})(\partial_u x(\gamma(t))\dot{u}(t)) + (P\circ x)(\gamma(t))\,(\partial_v x(\gamma(t)))\dot{v}(t)\,dt =$$

Considero

$\tilde{P}(u,v) = (P\circ x)(u,v)$ e sia

$\tilde{\omega}_P = (P\circ x)\cdot\partial_u x\,du + (P\circ x)\partial_v x\,dv = \tilde{P}\,\partial_u x\,du + \tilde{P}\,\partial_v x\,dv$

$$= \int_{\gamma=(\partial^+T)} \tilde{\omega}_P = \int_T (\partial_u N(u,v) - \partial_v M(u,v))\,du\,dv =$$

$\hookrightarrow$ curva nel piano

T insieme nel piano

Applico le formule di pag 9 $\qquad \left(\int_{\partial A^+}\omega = \int_A \partial_x N - \partial_y M\,dx\,dy \quad \omega = M\,dx + N\,dy\right)$

$M(u,v) = \tilde{P}\,\partial_u x \quad N(u,v) = \tilde{P}\,\partial_v x$

$$= \iint_T \partial_u(\tilde{P}\cdot\partial_v x) - \partial_v(\tilde{P}\partial_u x)\, du\, dv =$$

$$= \iint_T \partial_u\tilde{P}\cdot\partial_v x + \cancel{\tilde{P}\,\partial^2_{uv}x} - \partial_v\tilde{P}\cdot\partial_u x - \cancel{\tilde{P}\,\partial^2_{vu}x}\, du\, dv =$$

$$= \iint_T \partial_u\tilde{P}\,\partial_v x - \partial_v\tilde{P}\,\partial_u x \;=$$

Ricordiamo che

$$\tilde{P}(u,v) = (P\circ x)(u,v) = P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

$$\partial_u\tilde{P} = \partial_x P\cdot\partial_u x + \partial_y P\cdot\partial_u y + \partial_z P\cdot\partial_u z$$
$$\partial_v\tilde{P} = \partial_x P\cdot\partial_v x + \partial_y P\cdot\partial_v y + \partial_z P\cdot\partial_v z$$

$$= \iint_T (\cancel{\partial_x P\cdot\partial_u x\cdot\partial_v x} + \partial_y P\,\partial_u y\cdot\partial_v x + \partial_z P\cdot\partial_u z\cdot\partial_v x -$$
$$- \cancel{\partial_x P\cdot\partial_v x\cdot\partial_u x} - \partial_y P\,\partial_v y\cdot\partial_u x - \partial_z P\cdot\partial_v z\,\partial_u x)\, du\, dv =$$

$$= \iint_T \partial_y P(\partial_u y\cdot\partial_v x - \partial_v y\,\partial_u x) + \partial_z P(\partial_u z\,\partial_v x - \partial_v z\,\partial_u x)\, du\, dv$$

$$= \iint_T -\partial_y P\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + \partial_z P\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\, du\, dv \qquad (1)$$

In maniera analoga trovo

$$\int_a^b Q(\hat{\gamma}(t))\,\dot{\hat{y}}(t)\,dt = \iint_T \left(-\partial_z Q\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} - \partial_x Q\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) du\, dv \qquad (2)$$

$$\int_a^b R(\hat{\gamma}(t))\,\dot{\hat{z}}(t)\,dt = \iint_T \left(-\partial_x R\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + \partial_y R\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right) du\, dv \qquad (3)$$

Sommando membro a membro (1), (2) (3) troviamo la tesi

$\blacksquare$

Oss: Da (*) deduco che

$$\int_{\partial^+\Sigma}\omega = \int_a^b P(\hat{\gamma}(t))\cdot\dot{\hat{x}}(t) + Q(\hat{\gamma}(t))\cdot\dot{\hat{y}}(t) + R(\hat{\gamma}(t))\,\dot{\hat{z}}(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b F(\hat{\gamma}(t))\cdot\tau(t)\cdot\|\dot{\hat{\gamma}}(t)\|\,dt = \int_{\partial^+\Sigma} F\cdot\tau\,ds$$

→ è un integrale di prima specie ma l'orientazione viene trasferita alla funz. integranda tramite τ vett. tg a $\partial\Sigma^+$

dove $\tau = \dfrac{(\dot{\hat{x}}(t), \dot{\hat{y}}(t), \dot{\hat{z}}(t))}{\|\dot{\hat{\gamma}}(t)\|}$ versore tangente a $\partial^+\Sigma$

Es. Calcoliamo il lavoro del campo

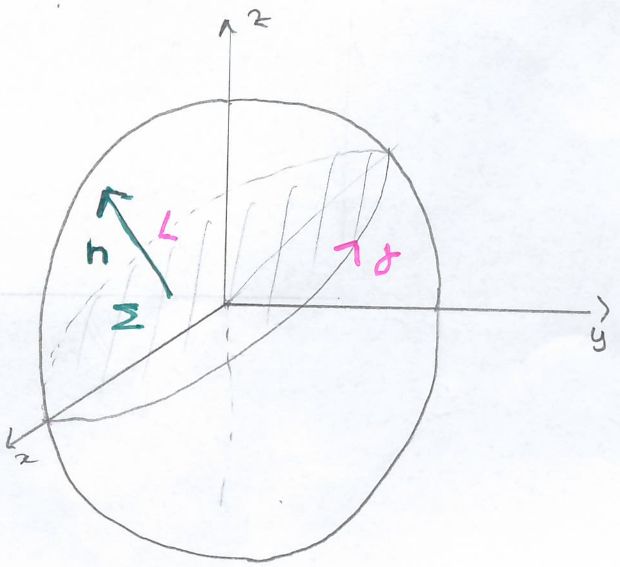
$F(x,y,z) = (y+z,\ z+x,\ x-y)$ lungo

$\gamma : [0;2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$t \longmapsto \left(\cos t,\ \frac{\sin t}{\sqrt{2}},\ \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)$

intersezione tra la superficie sferica di equazione $x^2+y^2+z^2=1$ e il piano $z=y$.

dim. Usiamo il teorema di Stokes.



Considero come Σ la porzione di piano $z=y$ racchiusa da γ

Definisco come orientazione per Σ quella determinata dalla normale

$$n = \frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}}$$

(se percorro Σ orientato da n lungo γ lascio Σ alla mia sx)

(piano $y=z$ generato dai vettori $(1,0,0)$ e $(0,1,1)$

$(1,0,0) \times (0,1,1) = (0,-1,1)$).

Calcoliamo il rot F

$$\text{rot}\, F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ y+z & z+x & x-y \end{vmatrix} = (-2,0,0)$$

$$\text{rot}\, F \cdot n = (-2,0,0)\cdot(0,-1,1) = 0$$

$$\int_\Sigma \text{rot}\, F \cdot n \, d\sigma = 0$$

Calcolando il lavoro direttamente

$$\int_{\partial^+\Sigma} \omega = \int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)(-\sin t) + \left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}} + \cos t\right)\frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \left(\cos t - \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\, dt = 0$$

$$\omega = (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x-y)\,dz$$