ANALISI 3B
Corso di Laurea in Matematica e Corso di Laurea in Fisica A.A. 2017/2018
Seconda prova in itinere
13 Giugno 2018

1. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(z\ln(y) - \alpha^2 \frac{x}{2} \ln(z), \alpha yz + \frac{xz}{y}, y^\alpha + x\ln(y) - \frac{x^2}{z} \right)$$

è conservativo in $E = \{(x,y,z)\mathbb{R}^3 : y > 0, z > 0\}$. Per tali valori calcolare un potenziale di F che si annulla nel punto $(1,1,1)$.

2. Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \left(y - \frac{y}{x^2+y^2} \right) \mathrm{d}x + \left(x + \frac{x}{x^2+y^2} \right) \mathrm{d}y$$

a) dimostrare che è chiusa ma non esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

b) calcolare l'integrale curvilineo di seconda specie

$$\int_{\partial^+ B_r(0)} \omega$$

dove $\partial^+ B_r(0)$ è la circonferenza di raggio $r > 0$ centrata nell'origine e orientata in senso antiorario;

c) data $\tilde{w}(x,y) = a(x,y)\mathrm{d}x + b(x,y)\mathrm{d}y$ una forma differenziale lineare continua e chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dimostrare che esistono una costante C ed una funzione $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus (0,0))$ tali che

- $a(x,y) = C\left(y - \frac{y}{x^2+y^2} \right) + \partial_x f(x,y)$
- $b(x,y) = C\left(x + \frac{x}{x^2+y^2} \right) + \partial_y f(x,y)$.

3. Calcolare il flusso di $F(x,y,z) = (3z^2, 6, 6xz)$ attraverso la superficie Σ data da $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 3$ nella direzione n (con n orientata in modo da avere la seconda componente negativa).

4. Sia A un dominio limitato regolare di $\mathbb{R}^2$ e sia B un aperto di $\mathbb{R}^2$ tale che $\overline{A} \subset B$. Siano u e v due funzioni di classe $C^2(B)$. Si dimostri che se $\partial_n u = \lambda u$ su ∂A e $\partial_n v = \lambda v$ su ∂A per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$ allora vale
$$\int\int_A (\Delta u) v \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int\int_A (\Delta v) u \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$