Corso di Laurea in Matematica

Programma del corso di **GEOMETRIA II -** a.a. 2017/18

Prof.sse Emilia Mezzetti e Valentina Beorchia

GEOMETRIA AFFINE

Vettori liberi e vettori applicati dello spazio ordinario. Spazio affine su uno spazio vettoriale V, sua dimensione, traslazioni, azione del gruppo additivo di V.

Sistemi di riferimento affine. Equazioni di un cambiamento di coordinate affine. Sottospazi affini, loro giacitura. Intersezione di sottospazi affini, condizione perché sia non vuota, sottospazi paralleli, sottospazi sghembi. Assioma di Playfair in uno spazio affine. Posizioni reciproche di sottospazi. Sottospazio generato. Caratterizzazione del sottospazio generato da un insieme finito di punti. Punti affinemente indipendenti. Equazioni parametriche e cartesiane dei sottospazi affini. Fasci propri e impropri di rette nel piano. Equazione di una retta del fascio come combinazione lineare di quelle di due rette particolari del fascio. Posizione reciproca di tre piani in uno spazio affine di dimensione 3. Retta per un punto incidente/complanare due rette date. Fasci d'iperpiani. Stelle proprie e improprie di piani.

Applicazioni affini, isomorfismi affini e affinità. Applicazione lineare soggiacente. Determinazione di un'affinità a partire da una coppia di punti corrispondenti e dalla parte lineare. Gruppo delle affinità, sottogruppo delle affinità che fissano un punto, sottogruppo delle traslazioni. Omotetie, simmetria rispetto a un punto. Ogni affinità è prodotto di una traslazione e un'affinità che fissa un punto O, nei due versi. Equazioni che rappresentano un'affinità, fissato un riferimento affine. Proprietà affini, figure affinemente equivalenti. Teorema fondamentale sulle affinità. Il rapporto semplice di tre punti allineati si conserva per affinità. Semiretta, segmento, triangolo, k-simplessi in spazi affini reali. Insiemi convessi e inviluppo convesso; si conservano per affinità.

Esempi di collineazioni che non sono affinità, con n=1 e con n=2 su C. Proiezione parallela a un sottospazio affine.

GEOMETRIA EUCLIDEA E UNITARIA

Spazi affini euclidei e unitari, distanza fra due punti. Sottospazi ortogonali. Distanza e angoli tra due sottospazi. Distanza fra sottospazi paralleli, distanza punto-iperpiano. Distanza fra due rette sghembe, retta ortogonale comune incidente le due rette, segmento di minima distanza. Sottospazi affini perpendicolari, angolo fra iperpiani.

Isometrie di uno spazio affine euclideo o unitario. Isometrie dirette e inverse. Riflessione rispetto a un iperpiano: è un'isometria inversa. Sottospazi fissi o invarianti e sottospazi stabili. Gruppo delle isometrie e suoi sottogruppi. Gruppo delle simmetrie di una figura. Il gruppo delle simmetrie di una sfera coincide con il gruppo delle isometrie che fissano il suo centro. Gruppo delle simmetrie di un triangolo equilatero, isoscele, scaleno, di un poligono regolare. Figure congruenti, proprietà euclidee.

Un sottospazio passante per un punto fisso dell'isometria f è sottospazio stabile per f se ha come giacitura un autospazio dell'automorfismo soggiacente, ed è fisso se l'autovalore è 1. Endomorfismi ortogonali di un piano vettoriale euclideo: descrizione, autospazi. Isometrie della retta euclidea. Isometrie del piano euclideo: ogni isometria diretta che non sia una traslazione ha almeno un punto fisso, classificazione delle isometrie dirette, glissoriflessioni, ogni isometria inversa senza punti fissi è una glissoriflessione. Teorema di Chasles sulla classificazione delle isometrie del piano. Ogni isometria del piano euclideo è composta di al più tre riflessioni. Il gruppo delle simmetrie di una figura limitata può contenere solo rotazioni e riflessioni. Cenni alla classificazione delle isometrie di uno spazio di dimensione ≥ 3.

GEOMETRIA PROIETTIVA
Spazio proiettivo. Dimensione. Riferimenti proiettivi e coordinate omogenee. Sottospazi proiettivi e loro equazioni. Spazio proiettivo duale. Intersezione e spazio congiungente di sottospazi proiettivi. Punti linearmente indipendenti e punti in posizione generale. Spazio proiettivo come ampliamento dello spazio affine con i punti all'infinito. Relazione di Grassmann proiettiva. In uno spazio proiettivo di dimensione n, dati n+2 punti in posizione generale, sono punti fondamentali e punto unità di un riferimento proiettivo. Chiusura proiettiva. Fasci di iperpiani, il luogo base è un sottospazio di codimensione 2.
Isomorfismi proiettivi e proiettività, applicazioni lineari che inducono uno stesso isomorfismo proiettivo. Gruppo proiettivo e sua descrizione come quoziente del gruppo lineare generale. Figure proiettivamente equivalenti, proprietà proiettive. Teorema fondamentale sulle proiettività.
Punti uniti e sottospazi invarianti di una proiettività. Birapporto di una quaterna ordinata di punti di una retta proiettiva.

CONICHE E QUADRICHE
Definizione di coniche affini, euclidee, proiettive. Coniche equivalenti per affinità, isometria, proiettività. Problema della classificazione proiettiva, affine ed euclidea ed equazioni canoniche.
Matrice simmetrica associata a una conica proiettiva, equazione matriciale. Le matrici associate a coniche proiettivamente equivalenti sono congruenti. Il rango della matrice associata ad una conica è un invariante proiettivo. Coniche non degeneri e degeneri. Teorema di diagonalizzazione di forme bilineari simmetriche. Teorema di classificazione delle coniche proiettive su un campo algebricamente chiuso e su **R**.
Matrice simmetrica associata a una conica affine, equazione in forma matriciale. Le matrici associate a due coniche affinemente equivalenti sono congruenti, e le sottomatrici dei coefficienti della parte quadratica sono pure congruenti. I ranghi della matrice e della sottomatrice della parte quadratica sono invarianti affini. Coniche degeneri e non degeneri, coniche a centro e parabole. Equazioni del centro di una conica a centro. Per le coniche reali a centro, distinzione tra ellissi e iperboli. Teorema di classificazione delle coniche affini. Immersione del piano affine nel piano proiettivo. Omogeneizzazione di polinomi, chiusura proiettiva di una conica affine. Punti impropri di coniche affini non degeneri. Rappresentazione dei punti impropri sul modello della sfera quozientata con la relazione antipodale.
Teorema di classificazione delle coniche piane euclidee. Vertici, fuochi, eccentricità e direttrici di coniche euclidee non degeneri. Proprietà focali e metriche delle coniche euclidee non degeneri.
Classificazione delle quadriche proiettive nei casi K algebricamente chiuso e reale. Intersezione di una quadrica proiettiva con una retta. Punti semplici e singolari di una quadrica proiettiva. Rette tangenti e iperpiano tangente a una quadrica in un punto semplice. Il luogo dei punti singolari di una quadrica è un sottospazio proiettivo. Le quadriche non degeneri sono lisce.
Mappa di Segre definita su $P^1 \times P^1$ e sua immagine. Famiglie di rette sulla quadrica immagine e loro geometria. Date tre rette sghembe in P^3, esiste sempre una quadrica liscia che le contiene ed è uguale all'unione delle rette secanti le tre rette date.
Classificazione affine ed euclidea delle quadriche in $\mathbf{K}^3$ con K algebricamente chiuso e **K=R**.

Testo di riferimento

Edoardo Sernesi, Geometria 1, Ed. Bollati Boringhieri

Altri testi consigliati

Philippe Ellia, Appunti di Geometria 1, Pitagora Editrice, Bologna 1997
Marco Abate, Geometria 1, Mc Graw Hill
Si vedano anche gli appunti delle docenti sul sito https://moodle2.units.it/