CLASSIFICAZIONE DELLE QUADRICHE PROIETTIVE

Una quadrica Q di $\mathbb{P}^n_K$ con $K=\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ha un'equazione della forma:

$$(*) \quad a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{01}x_0x_1 + \dots + 2a_{0n}x_0x_n + \dots$$
$$+ 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n = 0$$

ovvero $\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_ix_j = 0 \qquad a_{ij} = a_{ji}$;

il polinomio $F(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_ix_j$ è omogeneo di grado 2

Alla quadrica Q possiamo associare la matrice simmetrica

$$A_Q = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ & & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

e l'equazione $(*)$ si scrive in forma matriciale:

$${}^tX A_Q X = 0 \qquad \text{dove } X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Def.: Q e Q' sono proiettivamente equivalenti $\iff$ $\exists$ una proiettività $g: \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^n_K$ t.c. $g(Q) = Q'$

oss L'equivalenza proiettiva è una relazione di equivalenza

Come cambia l'equazione di una quadrica sotto una proiettività?

Sia $g: \mathbb{P}^n_K \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$ una proiettività, $\exists\, M \in GL(n+1, K)$ t.c.

se $P \in \mathbb{P}^n_K$, $P = [v_P]$ con $v_P \in K^{n+1} \setminus \{0\}$

allora $g(P) = [M v_P]$

sia $Q = g(P)$ e $w_Q = M v_P$

si ha: $v_P = M^{-1} w_Q$

P soddisfa l'equazione $\circledast$ $\Longleftrightarrow$ ${}^t v_P A_Q v_P = 0$

$\Longleftrightarrow (M^{-1} w_Q)^t A_Q (M^{-1} w_Q) = 0$

$\Longleftrightarrow w_Q \underbrace{({}^t M^{-1} A_Q M^{-1})}_{\text{matrice simmetrica } A_{Q'}} w_Q = 0$

$\Longrightarrow A_Q$ e $A_{Q'}$ sono congruenti

COROLLARIO: Il rango $rg(A_Q)$ è un invariante proiettivo e si chiama RANGO DI Q.

<u>Def</u>: Q si dice NON DEGENERE se $rg(A_Q) = n+1$ ($\det A_Q \neq 0$), altrimenti Q si dice DEGENERE.

Ricordiamo il:

Teorema di riduzione ad assi principali: (~~[illegible]~~ Ogni matrice <u>simmetrica</u> $A \in M((n+1)\times(n+1), \mathbb{C})$ è congruente alla matrice $\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ con $r = rg A$.

TEOREMA: Ogni quadrica $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è proiettivamente equivalente a una quadrica di equazione

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 = 0 \qquad \text{dove } r = rg\,\mathcal{Q}$$

Esempi: $x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$ è una quadrica di rango 4

$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ è una quadrica di rango 3

Teorema: Ogni matrice simmetrica reale A è congruente a una matrice del tipo

$$\left(\begin{array}{c|c|c} E_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -E_{r-p} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

dove $(p, r-p)$ è la SEGNATURA DI A.

COROLLARIO: Ogni iperquadrica $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è proiettivamente equivalente a una quadrica di equazione

$$x_0^2 + \dots + x_{p-1}^2 - x_p^2 - \dots - x_{r-1}^2 = 0 \qquad \text{con } p \geq \frac{r}{2}$$

$r = rg\,\mathcal{Q}$.

INTERSEZIONI TRA RETTE E QUADRICHE

Cons. una retta $L = \overline{AB} \subseteq \mathbb{P}^n_K$ dove K è alg. chiuso e

$A = [a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^n_K$, $B = [b_0, \dots, b_n] \in \mathbb{P}^n$

punti distinti; le equazioni parametriche di L sono del tipo:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda a_0 + \mu b_0 \\ x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda a_n + \mu b_n \end{cases}$$

con (λ, μ) parametri omogenei $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$; possiamo quindi pensare $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$

Sia $Q \subseteq \mathbb{P}^n_K$ una quadrica di equazione

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x_i x_j = 0$$

L'intersezione $Q \cap L$ è determinata dalle coppie di parametri (λ_0, μ_0) ~~tali~~ ~~che~~ che sono soluzioni dell'equazione

$$(*) \quad \underbrace{F(\lambda a_0 + \mu b_0, \lambda a_1 + \mu b_1, \dots, \lambda a_n + \mu b_n)}_{} = 0$$

polinomio omogeneo di grado 2 in λ e μ oppure è il polinomio nullo; in questo caso si ha $L \subseteq Q$.

Se il polinomio in (✪) non è nullo, determina una conica di $\mathbb{P}^1$, ed essendo K alg. chiuso, il luogo degli zeri di (✪) è una coppia di punti distinti oppure un punto doppio.

Abbiamo quindi:

Prop.: Su un campo alg. chiuso, se $L \not\subset Q$ è una retta, si ha che $L \cap Q = \begin{cases} \text{2 punti distinti} \\ \text{1 punto doppio.} \end{cases}$

Sia ora $A \in L \cap Q$, $L \not\subset Q$. Vogliamo definire la molteplicità di intersezione di L e Q in A in modo algebrico.

<u>Def.</u> Sia $A \in L \cap Q$, $L \not\subset Q$; cons. le eq. parametriche di L

$A = [a_0, a_1, \dots, a_n]$

$$\begin{cases} x_0 = \lambda a_0 + \mu b_0 \\ x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda a_n + \mu b_n \end{cases}$$

dove $B = [b_0, \dots, b_n] \in L$, $B \neq A$

$A \in L \cap Q \Rightarrow$ la coppia $[\lambda_0, \mu_0] = [1, 0]$ annulla il polinomio

$$G(\lambda, \mu) := F(\lambda a_0 + \mu b_0, \dots, \lambda a_n + \mu b_n)$$

$$I(Q, L; A) := \begin{cases} 2 & \text{se } [1,0] \text{ è radice di molt. } 2 \text{ di } G(\lambda,\mu) \\ & \text{cioè } \mu^2 \text{ divide } G(\lambda,\mu) \\ 1 & \text{se } [1,0] \text{ è radice di molt. } 1 \text{ di } G(\lambda,\mu) \\ & \mu \text{ divide } G,\ \mu^2 \text{ non divide } G \end{cases}$$

Def. $A \in Q$ si dice SEMPLICE se ~~per tutte~~ esiste una retta $L \ni A$ $L \not\subset Q$ tale che

$$I(Q, L; A) = 1$$

$A \in Q$ si dice SINGOLARE se per tutte le rette $L \ni A$, $L \not\subset Q$ si ha $I(Q, L; A) = 2$.

PROPOSIZIONE: $A \in Q$ è singolare $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial F}{\partial x_i}(A) = 0$ $\forall i = 0, \dots, n$.

Dim. Cons. $G(\lambda, \mu) = F(\lambda A + \mu B) \in K[\lambda, \mu] = K[\lambda][\mu]$

e cons. il suo polinomio di Taylor in $\mu = 0$:

(si vede Appendice di E. Sernesi Geometria 1):

$$G(\lambda, \mu) = G(\lambda, 0) + G'(\lambda, 0)\mu + \frac{1}{2} G''(\lambda, 0)\mu^2$$

$$= \underbrace{F(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)}_{=0} + \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) b_i\right)\mu +$$

perché $A \in Q$

$$+ \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i \partial x_j}(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) b_i b_j\right)\mu^2$$

$I(Q, L; A) = 2 \Leftrightarrow \mu^2$ divide $G(\lambda, \mu) \Leftrightarrow$ $\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) b_i = 0$

Cons. il polinomio lineare

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(A)\, x_i = L(x_0,\dots,x_n)$$

Si ha: $I(L, Q; A) = 2 \quad \forall L \ni A,\ L \not\subseteq Q$

$$\iff \forall B \in \mathbb{P}^n_k : \begin{array}{l} B \neq A, \\ B \notin Q \end{array}$$

$$L(b_0,\dots,b_n) = 0$$

Se $L(x_0,\dots,x_n)$ non è il polinomio nullo, il suo luogo di zeri è un iperpiano $H \subseteq \mathbb{P}^n_k$, e si può verificare facilmente che non esistono iperpiani H t.c.

$$H \supseteq \mathbb{P}^n_k \setminus Q.$$

Quindi: A è singolare $\iff L(x_0,\dots,x_n)$ è il polinomio nullo

$$\iff \frac{\partial F}{\partial x_i}(A) = 0 \quad \forall i = 0,\dots,n.$$

COR.: $A \in Q$ è semplice se $\exists j : \frac{\partial F}{\partial x_j}(A) \neq 0$

Def. Sia $A \in Q$ un punto semplice; l'iperpiano di equazione:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(A)\, x_i = 0 \quad : T_A Q$$

si dice IPERPIANO TANGENTE a Q in A.

L'equazione dell'iperpiano tangente si può scrivere quindi nella forma

$$^t(2 A_Q v_p) \cdot x = 0$$

ovvero $\quad {}^t v_p A_Q x = 0$

Inoltre:

PROP: $P \in Q$ è singolare $\iff A_Q v_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff v_p \in \operatorname{Ker} L_{A_Q}$

applicazione lineare associata a A_Q

$L_{A_Q} : K^{n+1} \to K^{n+1}$

<u>Def.</u> : $Q_{sing} := \{P \in Q \mid P \text{ è singolare}\}$

COROLLARIO: $Q_{sing} = \mathbb{P}(\ker L_{A_Q})$

COROLLARIO: $Q_{sing} = \emptyset \iff \ker L_{A_Q} = \{0\}$

$\iff A_Q$ ha rango massimo $n+1$

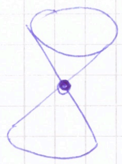
$\iff \det A_Q \neq 0$

Inoltre: Se A_Q non ha rango massimo, Q_{sing} è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n_k$ di dimensione:

$$\dim Q_{sing} = n - r \quad \text{con } r = \rho Q$$

Esempio: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ è singolare

ha 1 punto singolare: $\{[1,0,0,0]\}$



MAPPA DI SEGRE E QUADRICHE DI $\mathbb{P}^3_k$ CONTENENTI 3 RETTE SGHEMBE

Cons. il prodotto cartesiano $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ e l'applicazione

$$\sigma : \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k \longrightarrow \mathbb{P}^3_k$$

$$[s_0, s_1], [t_0, t_1] \longmapsto [s_0 t_0, s_0 t_1, s_1 t_0, s_1 t_1]$$

è facile dimostrare che σ è ben definita e iniettiva.

Lemma: $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ è la quadrica Q di $\mathbb{P}^3$ di equazione

$$z_0 z_3 - z_1 z_2 = 0$$

Dim: $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subseteq Q$ è facile da verificare.

Sia $[a_0, a_1, a_2, a_3] \in Q$; allora vale $a_0 a_3 - a_1 a_2 = 0$

$$= \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ le colonne sono linearmente dipendenti; non sono entrambe nulle; supp. $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Allora possiamo scrivere $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c a_0 \\ c a_2 \end{pmatrix}$

per una opportuna costante $c \in K$

quindi: $[a_0, a_1, a_2, a_3] = [a_0, c a_0, a_2, c a_2]$

$$= \sigma([a_0, a_2], [1, c]).$$

$$\Rightarrow Q \subseteq \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1).$$

Lemma: Q è ricoperta da due famiglie di rette sghembe. Inoltre, ogni retta della prima famiglia interseca ogni retta della seconda famiglia esattamente in un punto.

Dim.: Sia $[a_0, a_1] \in \mathbb{P}^1$; si ha

$$\sigma(\{[a_0, a_1]\} \times \mathbb{P}^1) = [a_0 t_0, a_0 t_1, a_1 t_0, a_1 t_1]$$

è la retta di eq. cartesiane

FAMIGLIA $\mathcal{A}$ $\begin{cases} a_0 z_2 - a_1 z_0 = 0 \\ a_0 z_3 - a_1 z_1 = 0 \end{cases}$

Si verifica facilmente che se $[a_0', a_1'] \neq [a_0, a_1]$, le rette corrispondenti sono sghembe.

Un'altra famiglia di rette sghembe si ottiene considerando $[b_0, b_1] \in \mathbb{P}^1$ e

$$\sigma(\mathbb{P}^1 \times \{[b_0, b_1]\}) = [s_0 b_0, s_0 b_1, s_1 b_0, s_1 b_1]$$

è una retta di eq. cartesiane

FAMIGLIA $\mathcal{B}$ $\begin{cases} b_1 z_0 - b_0 z_1 = 0 \\ b_1 z_2 - b_0 z_3 = 0 \end{cases}$

Se $L \in \mathcal{A}$ e $M \in \mathcal{B}$

$$L \cap M = \{\sigma([a_0, a_1], [b_0, b_1])\}.$$

<u>PROP.</u> : Fissiamo 3 rette $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{A}$.

Allora Q contiene tutte le rette secanti L_1, L_2 ed L_3.

<u>Dim.</u> Ogni retta della famiglia $\mathcal{B}$ interseca sia L_1, che L_2, che L_3. Inoltre, se una retta $M \subseteq \mathbb{P}^3$ ha queste proprietà, allora $M \cap Q$ contiene almeno 3 punti $\Rightarrow M \subseteq Q$.

PROP.: Siano M_1, M_2 e $M_3 \subseteq \mathbb{P}^3_k$ tre rette sghembe. Allora $\exists$ una proiettività $g : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$

tale che
$$g(M_1) = L_1$$
$$g(M_2) = L_2$$
$$g(M_3) = L_3$$

dove L_1 è la retta $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_1 = 0 \end{cases}$

L_2 è la retta $\begin{cases} z_2 = 0 \\ z_3 = 0 \end{cases}$

L_3 è la retta $\begin{cases} z_0 - z_2 = 0 \\ z_1 - z_3 = 0 \end{cases}$.

Dim. Fissiamo due punti $P_1, P_2 \in M_1$ e $P_3 \in M_2$.

Il piano proiettivo $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$ interseca M_3 esattamente in un punto $Q \in M_3$ (infatti $M_3 \not\subseteq \langle P_1, P_2, P_3 \rangle$ perché sghemba con M_1)

Fissiamo $P_4 \in M_2$ e $P_5 \in M_3$ in modo che

$\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ siano in posizione generale

(basta sceglierli fuori dalle rette $\overline{P_iP_j}$, ~~[illegible]~~).

Siano $Q_1, Q_2 \in L_1$, $Q_3 \in L_2$, $Q_5 \in L_3$
$Q_4 \in L_2$

in posizione generale.

Per il Teorema fond. sulle proiettività, $\exists !\ g : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$

t.c.
$$g(P_1) = Q_1$$
$$g(P_2) = Q_2$$
$$g(P_3) = Q_3$$
$$g(P_4) = Q_4$$
$$g(P_5) = Q_5$$

Inoltre si ha $g(Q) = \langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle \cap L_3$

e g ha le proprietà richieste.

COROLLARIO: Le rette secanti 3 rette sghembe in $\mathbb{P}^3$ formano una quadrica liscia.

Dim. ~~[illegible]~~ Il luogo cercato è proiettivamente equivalente alla quadrica Q di eq. $z_0z_3 - z_1z_2 = 0$, che è non degenere.