



Curve regolari

Curve regolari in \mathbf{R}^n e in particolare in \mathbf{R}^3 . Velocità e accelerazione. Lunghezza di un arco di curva. Parametro lunghezza d'arco. Curve rettificabili. Ogni curva di classe C^1 è rettificabile. Versore tangente. Retta tangente. Orientazioni di uno spazio vettoriale reale. Derivato di un vettore di norma costante. Curvatura. Punti di flesso. Versore normale. Curve biregolari. Piano osculatore. Prodotto vettoriale e prodotto misto di vettori. Versore binormale. Torsione. Formule di Frenet. Curve a curvatura o a torsione costante nulla. Forma canonica locale. Significato geometrico del verso di \mathbf{n} e del segno della torsione. Curvatura di una curva piana. Calcolo dell'apparato di Frenet. Circolo osculatore e raggio di curvatura. Differenziale in un punto di una mappa differenziabile di \mathbf{R}^n in \mathbf{R}^m . Trasformata di una curva in un'isometria di \mathbf{R}^3 . Confronto fra gli apparati di Frenet di curve congruenti. Teorema di esistenza, e unicità a meno di congruenza, di una curva con curvatura e torsione assegnate.

Superfici regolari in \mathbf{R}^3

Superfici parametrizzate. Immersioni e embedding di aperti di \mathbf{R}^2 in \mathbf{R}^3 . Superfici regolari. Atlanti. Curve coordinate. Parametrizzazioni locali della sfera: di Monge, in coordinate polari, proiezione stereografica. Criteri di regolarità: parametrizzazioni di Monge, superfici di livello. Ogni superficie regolare è localmente un grafico. Piano tangente. Funzioni differenziabili su una superficie. Cambiamento di coordinate locali. Campi vettoriali su una superficie. Versore normale. Campo vettoriale normale. Orientazioni di una superficie. Superfici orientabili. Il nastro di Moebius. Applicazioni differenziabili e diffeomorfismi tra superfici. Differenziale di un'applicazione differenziabile tra superfici. Prima forma fondamentale. Coefficienti della I forma fondamentale. Area di una regione di superficie (cenni).

Mappa di Gauss di una superficie orientata. Differenziale della mappa di Gauss e operatore forma come endomorfismo autoaggiunto del piano tangente. Seconda forma fondamentale. Coefficienti della II forma fondamentale. Ombelichi. Direzioni e curvatures principali. Curvatura normale di una curva contenuta in una superficie, teorema di Meusnier. Curvatura gaussiana e curvatura media. Espressione della curvatura gaussiana e media in coordinate locali. Sezioni normali. Formula di Eulero per la curvatura normale. Curvature principali come massimo e minimo delle curvatures normali. Classificazione dei punti di una superficie. Intersezione superficie - piano tangente in un punto ellittico o iperbolico. Direzioni asintotiche. Superfici di rotazione. Curve asintotiche. Linee di curvatura. Superfici rigate. Rigate sviluppabili e loro caratterizzazioni. Superfici di cui tutti i punti sono ombelichi. Superfici minime. Variazione normale di una parametrizzazione, caratterizzazione delle superfici minime.

Riferimento mobile su una superficie associato a una carta locale. Simboli di Christoffel. Equazioni di Gauss e di Codazzi - Mainardi. Teorema Egregium di Gauss e sue conseguenze. Isometrie e isometrie locali tra superfici. Pseudosfera. Teorema di O. Bonnet sull'esistenza e unicità a meno di isometrie di una superficie con E, F, G, e, f, g assegnate (cenni). Geodetiche, equazioni differenziali delle geodetiche. Superfici geodeticamente complete. Cenni al Teorema di Gauss-Bonnet.

Testi di riferimento

M.P. Do Carmo: *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, 1976

M. Abate – F. Tovena: *Curve e superfici*, Springer Italia, 2006

B. O'Neill, *Elementary differential geometry*, II ed., Academic Press, 1997