PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA - A.A. 2017/18

CORSI DI LAUREA IN INGEGNERIA NAVALE ED INDUSTRIALE

Trieste, 26/6/2018 *Prof. Dario Portelli*

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate

1.– Si considerino le seguenti liste di vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\mathscr{L}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{ed} \qquad \mathscr{L}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

i) Si verifichi che $\mathscr{L}_1$ è una base di $\mathbb{R}^3$, mentre $\mathscr{L}_2$ non lo è.

ii) Si scriva il vettore

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

come combinazione lineare dei vettori di $\mathscr{L}_1$ e di quelli di $\mathscr{L}_2$.
Qual'è la differenza?

iii) Si estragga da $\mathscr{L}_2$ una famiglia massimale di vettori linearmente indipendenti. Si completi, poi questa famiglia ad una base di $\mathbb{R}^3$.

2.– Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica dello spazio vettoriale $\mathbb{C}^3$ (spazio vettoriale sul campo dei numeri complessi!) dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cioè

$$f\left(\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_2 \\ z_1 \\ z_3 \end{bmatrix} \qquad \forall \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

i) Si verifichi che f è diagonalizzabile.

ii) Si costruisca una base $\mathscr{B}$ di $\mathbb{C}^3$ formata tutta da autovettori di f.

iii) Si scriva la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\mathscr{B}$.

3.– i) Si verifichi che la forma bilineare su $\mathbb{R}^4$ data da

$$(*) \qquad g\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \right) = v_1 w_1 + v_1 w_2 + v_2 w_1 + 2 v_2 w_2 + v_3 w_3 + 3 v_4 w_4$$

è un prodotto scalare.

ii) Se U è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

si determini $U^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^4 \mid g(u,w) = 0 \ \ \forall u \in U \}$, per esempio mediante una sua base.

iii) Si verifichi che $U + U^\perp$ è una somma diretta, e si trovi poi il sottospazio $U + U^\perp$ di $\mathbb{R}^4$.

iv) Se e_1 è il primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^4$, si determini l'unico vettore $u \in U$ tale che $e_1 - u \in U^\perp$.

4.– Qual'è la posizione reciproca del piano α e della retta r dello spazio affine $\mathbb{A}^3$ aventi equazioni cartesiane (rispetto ad un fissato sistema di coordinate affini O, x, y, z) rispettivamente:

$$\alpha \quad x + y + z = 1 \qquad\qquad r \quad \begin{cases} 3x + 3y - z &= -9 \\ x + y &= -2 \end{cases}$$

Si determinino, poi, equazioni cartesiane e parametriche per il piano β passante per l'origine e contenente la retta r.