CORREZIONE COMPITO DEL 26/6/2018

ESERCIZIO 1)

i) $u_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = e_2$ $u_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ Bisogna verificare che $\mathcal{L}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Poiché $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ basta verificare o che $\{u_1, u_2, u_3\}$ sono linearmente indipendenti o che generano $\mathbb{R}^3$

Nel primo caso, sia

$a u_1 + b u_2 + c u_3 = \underline{0}$ $a, b, c \in \mathbb{R}$, cioè $a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+c\\a+b+c\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \underline{c=0} \Big\} \Rightarrow \underline{a=0} \Rightarrow \underline{b=0}$$

Nel secondo caso (se lo si preferisce), è sufficiente verificare che opportune combinazioni lineari di u_1, u_2, u_3 forniscono tre vettori che sappiamo già essere una base di $\mathbb{R}^3$. Ad esempio, la base canonica. Infatti, si ha:

$$u_1 - u_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = e_1 \qquad u_2 = e_2 \qquad u_3 - u_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = e_3$$

$v_1 = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $v_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ Bisogna verificare che $\mathcal{L}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ non è una base di $\mathbb{R}^3$.

Si vede subito che $v_1 = v_2 + v_3$, cioè $v_1 - v_2 - v_3 = \underline{0}$ e v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

---

ii) $$a u_1 + b u_2 + c u_3 = \begin{bmatrix}a & & +c\\a+b+c\\ & & c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\\8\end{bmatrix} \Rightarrow \underline{c=8} \Rightarrow \begin{cases}a+8=4\\a+b+8=6\end{cases} \quad \underline{a=-4} \quad \underline{b=2}$$

(calcolato sopra)

$$\begin{bmatrix}4\\6\\8\end{bmatrix} = 2v_1 = v_1 + v_2 + v_3$$

In questo caso la combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 che fornisce il vettore ${}^t[4\ 6\ 8]$ <u>non è unica</u>

Mentre la comb. lineare di u_1, u_2, u_3 che fornisce ${}^t[4\ 6\ 8]$ <u>è unica</u>.

iii) v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Infatti, altrimenti, si avrebbe ad esempio $v_3 = a v_2$ per qualche $a \in \mathbb{R}$ opportuno. Cioè:

$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\a\\a\end{bmatrix} \Rightarrow a=1$, ma questo non funziona sulle altre due componenti dei vettori.

Si può verificare che v_2, v_3, e_3 (vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3$) formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Infatti, si vede facilmente che i vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono combinazione lineare di v_2, v_3, e_3

ESERCIZIO 2

i) Si vede dalla matrice A che $f(e_3) = e_3 = 1 \cdot e_3$. Quindi si ha subito un autovettore col suo autovalore.

$$p_A(t) = \det\begin{bmatrix}-t & -1 & 0\\ 1 & -t & 0\\ 0 & 0 & 1-t\end{bmatrix} = (1-t)\det\begin{bmatrix}-t & -1\\ 1 & -t\end{bmatrix} = (1-t)(t^2+1) =$$

Laplace, secondo l'ultima riga

Stiamo lavorando su $\mathbb{C}$

$$= (1-t)(t-i)(t+i) \qquad i = \sqrt{-1} \text{ l'unità immaginaria}$$

Quindi si hanno i tre autovalori: $1, i, -i$, ciascuno con la molteplicità algebrica 1. Da $1 \le m_g(\lambda) \le m_{alg}(\lambda) = 1$ segue che per ciascuno degli autovalori di f la molt. algebrica è uguale alla molt. geometrica. Dunque f è diagonalizzabile.

ii) $\lambda = i$

$$A - iI_3 = \begin{bmatrix}-i & -1 & 0\\ 1 & -i & 0\\ 0 & 0 & 1-i\end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightsquigarrow R_1 - iR_2} \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -i & 0\\ 0 & 0 & 1-i\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow rg(A - iI_3) = 2 \qquad \begin{bmatrix}1 & -i & 0\\ 0 & 0 & 1-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - iy = 0 \\ \underbrace{(1-i)}_{\neq 0} z = 0\end{cases}$$

$\Rightarrow E_i = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{C} \right\}$ $\quad v_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è autovettore per f rel. all'autovalore i.

Analogamente si verifica che $v_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è autovettore per f, relativo all'autovalore $-i$.

Dunque $\mathcal{B} = (v_1, v_2, e_3)$ è una base ordinata di $\mathbb{C}^3$, formata tutta da autovettori di f. Questo risolve ii).

iii) La matrice che rappresenta f rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Qui l'esercizio sarebbe finito, ma lo verifico per un'altra via

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_c & & \mathcal{B}_c \\ \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^3 \\ id \uparrow & & \downarrow id \\ \mathbb{C}^3 & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{C}^3 \\ \mathcal{B} & & \mathcal{B} \end{array}$$

$$P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_c}(id) = \begin{bmatrix} i & -i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrice di cambiamento di base

Calcolo P^{-1} col solito algoritmo

$$[P \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} i & -i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \rightsquigarrow (-i)R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_2 \rightsquigarrow R_2 - R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] R_2 \rightsquigarrow \tfrac{1}{2} R_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] R_1 \rightsquigarrow R_1 + R_2$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ I_3 & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifico (perché non si sa mai ...)

$$PP^{-1} = \begin{bmatrix} i & -i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OK!

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & -i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & -i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{OK}$$

ESERCIZIO 3)

i) Calcolo la matrice [redacted] 4x4 usando la formula (1):

$$M = \begin{bmatrix} g(e_1,e_1) & g(e_1,e_2) & g(e_1,e_3) & g(e_1,e_4) \\ g(e_2,e_1) & g(e_2,e_2) & g(e_2,e_3) & g(e_2,e_4) \\ g(e_3,e_1) & g(e_3,e_2) & g(e_3,e_3) & g(e_3,e_4) \\ g(e_4,e_1) & g(e_4,e_2) & g(e_4,e_3) & g(e_4,e_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Si verifica facilmente che

$$g\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

Quindi <u>g è bilineare</u>. Inoltre <u>g è simmetrica</u> poiché M è simmetrica.

Infine, per verificare che g è definita positiva basta vedere se [OPPURE, vedi foglio 7]

$$\underbrace{\det([1])}_{=1} > 0 \quad \underbrace{\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)}_{=1} > 0 \quad \underbrace{\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)}_{=1} > 0 \quad \underbrace{\det(M)}_{=3} > 0 \quad \underline{OK}$$

---

ii) Non è strettamente necessario, ma è opportuno verificare, innanzitutto, se U si può generare con vettori più semplici. Nel nostro caso

$$u - v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi si può generare U anche con $u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = u_2$ $\quad \underline{\dim(U) = 2}$

Determiniamo adesso $U^\perp$. Sia $w \in U^\perp$; allora

$$g(u,w)=0 \quad \forall u \in U \qquad u = a u_1 + b u_2 \qquad a,b \in \mathbb{R}$$

$$g(u,w) = g(a u_1 + b u_2, w) \underset{\text{bilinearità di } g}{=} a\, g(u_1,w) + b\, g(u_2,w)$$

Quindi $w \in U^\perp \iff g(u_1,w)=0$ e $g(u_2,w)=0$

$$g(u_1,w)=0 \iff \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = 0$$ cioè

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$g(u_1,w)=0 \iff w_1 - 2w_2 - w_3 - 3w_4 = 0$$

Analogamente si trova che

$$g(u_2,w)=0 \iff w_1 + w_2 + w_3 = 0$$

Quindi $U^\perp$ è l'insieme di tutte le soluzioni del SLO

$$\begin{cases} w_1 - 2w_2 - w_3 - 3w_4 = 0 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$rg(A) = 2 \implies \dim(U^\perp) = 4 - 2 = \underline{2}$$

$$A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

w_3, w_4 : parametri liberi

Una base per $U^\perp$ è data, allora, da:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ w_3 \\ w_4 \end{array}$$

iii) Poiché g è un prodotto scalare, $U \cap U^\perp = \{0\}$ e pertanto la somma $U + U^\perp$ è diretta. Inoltre, per la formula di Grassmann

$$\dim(U+U^\perp) = \dim(U) + \dim(U^\perp) - \dim(U \cap U^\perp) = 2+2-0 = 4$$

$$U+U^\perp \subset \mathbb{R}^4 \quad \dim(\mathbb{R}^4) = 4 \Longrightarrow \underline{U+U^\perp = \mathbb{R}^4}$$

---

iv) $u \in U$; quindi

$$u = a\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b\\-a\\a+b\\a\end{bmatrix} \Longrightarrow e_1 - u = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}b\\-a\\a+b\\a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-b\\a\\-a-b\\-a\end{bmatrix}$$

Determiniamo $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che $e_1 - u \in U^\perp$.
Questo equivale ad avere:

$$\begin{cases} 1-\cancel{b}-2a+a+\cancel{b}+3a = 0 \\ 1-b+\cancel{a}-\cancel{a}-b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a = -1 \\ 2b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ESERCIZIO 4)

La direzione della retta r è l'insieme di tutte le soluzioni del SLO:

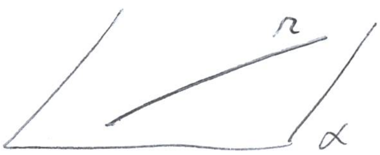
$$\begin{cases} 3x+3y-z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

quindi ha per base il vettore $v = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

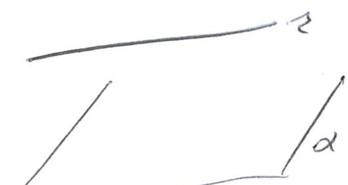
La giacitura del piano α è l'insieme $W \subset \mathbb{R}^3$ formato da tutte le soluzioni del SLO

$x+y+z=0$ si verifica subito che $v \in W \to \underline{r \parallel \alpha}$

Quindi avremo $\underline{r \subset \alpha} \iff r \cap \alpha \neq \emptyset$



altrimenti:
se $r \cap \alpha = \emptyset$



Dalle equazioni cartesiane di r si ricava subito che un punto di r è $P(-1,-1,3)$; si verifica immediatamente che $P \in \alpha$. Dunque $r \subset \alpha$.

Il generico piano per r ha equazione cartesiana

$$\lambda(3x+3y-z+9)+\mu(x+y+2)=0 \qquad (\lambda,\mu)\neq(0,0).$$

Impongo il passaggio per l'origine:

$$9\lambda+2\mu=0 \qquad \lambda=2 \quad \mu=-9$$

$$2(3x+3y-z+9)-9(x+y+2)=0$$

$$6x+6y-2z+\cancel{18}-9x-9y-\cancel{18}=0 \qquad -3x-3y-2z=0$$

$$\boxed{3x+3y+2z=0}$$

Trovo una base per la sua giacitura: $\begin{bmatrix}2\\0\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix}$

Equazioni parametriche per il piano in questione sono, allora:

$$\begin{cases} x = 2s \\ y = 2t \\ z = -3s-3t \end{cases}$$

MODO ALTERNATIVO per provare che $g: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ nell'esercizio 3 è definito positivo:

$$g(v,v) = v_1^2+2v_1v_2+2v_2^2+v_3^2+3v_4^2 = (v_1+v_2)^2+v_2^2+v_3^2+3v_4^2 \geq 0$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^4$. Infine,

$$g(v,v)=0 \iff \begin{cases} v_1+v_2=0 \\ v_2=0 \\ v_3=0 \\ v_4=0 \end{cases} \iff v=0$$