Corso di Laurea in Matematica, Corso di Laurea in Fisica
Esame di Analisi 3, modulo B
A.a. 2017-2018, sessione estiva, I appello

COGNOME ______________________ NOME ______________________

N. Matricola ______________________ Anno di corso ______________________

Corso di Studi: Matematica ◯ Fisica ◯

ESERCIZIO N. 1. Si ponga

$$J = \left\{(x,y,z) : \max\{|y|,|z|\} \leq \frac{1}{1+x^2}\right\}.$$

(*i*) Si provi che J è localmente misurabile in $\mathbb{R}^3$.

Per ogni 3-rettangolo R, $R \cap J$ è 3-misurabile, in quanto la sua frontiera è trascurabile essendo unione finita di grafici di funzioni continue.

(*ii*) Si stabilisca se J è misurabile in senso generalizzato in $\mathbb{R}^3$ e, in caso affermativo, se ne calcoli la misura.

Posto per ogni n, $A_n = \{(x,y,z) : |x| \leq n, |y| \leq \frac{1}{1+x^2}, |z| \leq \frac{1}{1+x^2}\}$

si ha

$$\iiint_{A_n} 1\,dx\,dy\,dz = \int_{-n}^{n}\left(\int_{-\frac{1}{1+x^2}}^{\frac{1}{1+x^2}}\left(\int_{-\frac{1}{1+x^2}}^{\frac{1}{1+x^2}} 1\,dz\right)dy\right)dx$$

$$= 8\int_0^n \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$= 4\,\operatorname{arctg} n + 4\frac{n}{1+n^2} \to 2\pi, \quad \text{se } n \to +\infty$$

ESERCIZIO N. 2. Si calcoli, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\iint_E |z|^\alpha dxdydz,$$

con $E = \Big\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + (|z|-1)^2 \le 1\Big\} \cup \Big\{(x,y,z) : |x| \le 1, |y| \le 1, |z| \le 1\Big\}$.

RISULTATO

$$\alpha > -1 \ : \ \frac{8}{\alpha+1} + 2\left(\frac{2\pi}{\alpha+2}\left(2^{\alpha+2}-1\right) - \frac{\pi}{\alpha+3}\left(2^{\alpha+3}-1\right)\right); \ \alpha \le -1 : +\infty$$

SVOLGIMENTO

$$\text{Si ha} \quad E = \overbrace{\{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1, \ z \ge 1\}}^{= E_2} \cup \overbrace{[-1,1]^3}^{= E_1}$$

$$\cup \underbrace{\{(x,y,z) : x^2+y^2+(z+1)^2 \le 1, \ z \le -1\}}_{= E_3}.$$

- $$\iiint_{E_1} |z|^\alpha dx\,dy\,dz = 4\int_{-1}^{1} |z|^\alpha dz = \begin{cases} \frac{8}{\alpha+1} , & \alpha > -1, \\ +\infty , & \alpha \le -1. \end{cases}$$

- $\alpha > -1$:
$$\iiint_{E_2} z^\alpha dx\,dy\,dz = \int_1^2 \left(\iint_{S_z} z^\alpha dx\,dy\right) dz$$
$$= \int_1^2 \pi\left(1-(z-1)^2\right) z^\alpha dz = \pi \int_1^2 \left(2z^{\alpha+1} - z^{\alpha+2}\right) dz$$
$$= 2\pi \left[\frac{z^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right]_1^2 - \pi \left[\frac{z^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_1^2$$
$$= \frac{2\pi}{\alpha+2}\left(2^{\alpha+2}-1\right) - \frac{\pi}{\alpha+3}\left(2^{\alpha+3}-1\right)$$

- $\alpha > -1$:
$$\iiint_{E_3} |z|^\alpha dx\,dy\,dz = \iiint_{E_2} z^\alpha dx\,dy\,dz$$