Note di Istituzioni di Geometria Superiore 3

7 luglio 2018

Indice

0.1 Spazi tangente e punti nonsingolari

1 Caso affine

In questa sezione introdurremo gli spazi tangenti e i punti singolari. Vediamo prima la definizione di spazio tangente immerso per una varietà affine.

Definizione 0.1. Sia $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Indicheremo con

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in K[x_1, \ldots, x_n]$$

la derivata parziale i-esima.

Sia $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$. Un punto $p \in X$ si dice *singolare* se

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Un punto $p \in X$ si dice *nonsingolare* o *liscio* o *semplice* se non è singolare.

Denotiamo con

$$X_{sm} := \{p \in X \mid p \text{ liscio}\}, \quad X_{sing} := \{p \in X \mid p \text{ singolare}\}.$$

Se $X = X_{sm}$, X si dice *liscia* o *nonsingolare*.

Proposizione 1. *Sia $X \subset \mathbb{A}^n$ un'ipersuperficie irriducibile. Allora X_{sm} è un aperto denso di X.*

Dimostrazione. Supponiamo $char(K) = 0$. Sia $X = V(f)$ con $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ polinomio ridotto. Per definizione abbiamo che

$$X_{sing} = V\left(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

che è chiuso in X, quindi X_{sm} è aperto. Dobbiamo mostrare che non è vuoto. Se per assurdo lo fosse, avremmo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \langle f \rangle.$$

Essendo

$$\deg \frac{\partial f}{\partial x_i} < \deg f,$$

si avrebbe che $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ è il polinomio nullo per ogni $i = 1, \ldots, n$, quindi $f = costante$, assurdo.

Il risultato vale anche se K è algebricamente chiuso e $char(K) = p \neq 0$. In questo caso la condizione $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ implica che f è un polinomio nelle potenze p-esime delle x_i e si può quindi scrivere nella forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)^p,$$

quindi f non sarebbe un polinomio ridotto.

□

Definizione 0.2. Sia $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ e $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{A}^n$. Il *differenziale* di f in p è l'applicazione lineare

$$d_p f : K^n \to K, \quad d_p f(a_1, \ldots, a_n) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) a_i.$$

Osservazione 1. *Per il differenziale di un prodotto di polinomi vale la regola di Leibnitz*

$$d_p(fg) = d_p(f)\, g(p) + f(p)\, d_p(g).$$

Definizione 0.3. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un chiuso di Zariski, non necessariamente irriducibile. Lo *spazio tangente immerso* $t_p X$ è

$$t_p X := \bigcap_{f \in I(X)} \ker d_p f \subseteq K^n.$$

Tale spazio può essere definito anche come il chiuso affine

$$t_p X = V\left(\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) x_i \mid f \in I(X)\right\}\right) \subseteq \mathbb{A}^n.$$

Vedremo ora che lo spazio tangente immerso è determinato dai differenziali di un sistema di generatori dell'ideale $I(X)$.

Lemma 1. *Se* $I(X) = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$*, allora*

$$t_p X = \bigcap_{i=1}^{r} \ker d_p f_i.$$

Dimostrazione. L'inclusione $t_p X \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} \ker d_p f_i$ è facilmente verificabile. Sia $h \in I(X)$; allora $h = \sum_{i=1}^{r} h_i f_i$. Si ha

$$d_p h = \sum_{i=1}^{n} (d_p h_i\ f_i(p) + h_i(p)\ d_p f) = \sum_{i=1}^{n} h_i(p)\ d_p f_i,$$

perchè $f_i(p) = 0$, da cui la tesi. $\square$

Definizione 0.4. Un punto $p \in X$ si dice *nonsingolare* o *liscio* o *semplice* se

$$\dim t_p X = \dim X,$$

dove $\dim t_p X$ indica la dimensione come sottospazio vettoriale o equivalentemente la sua dimensione come varietà affine.

Un punto $p \in X$ si dice *singolare* se non è liscio.

Poniamo

$$X_{sm} := \{p \in X \mid p \text{ liscio}\}, \quad X_{sing} := \{p \in X \mid p \text{ singolare}\}.$$

Se $X = X_{sm}$, X si dice *liscia* o *nonsingolare*.

Definizione 0.5. Siano $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ varietà affini, e sia

$$f : X \to Y, \quad f = (f_1, \ldots, f_m),$$

un morfismo; consideriamo $p \in X$ e sia $q = f(p)$.

Il *differenziale di* f *in* p è l'applicazione lineare (il morfismo) determinato da

$$d_p\ f := (d_p f_1, \ldots, d_p f_m) : t_p X \to t_q Y.$$

2 Caso quasi proiettivo

Nel caso quasi proiettivo diamo una definizione di spazio tangente astratto, che si chiama spazio tangente di Zariski. La sua definizione è intrinseca e dipende solo dall'anello locale in un punto. Vedremo che nel caso affine tale spazio è isomorfo allo spazio tangente immerso t_pX introdotto nella sezione precedente, che è invece definito a partire dall'ideale di un chiuso di Zariski. Come conseguenza avremo che la sua dimensione è indipendente dall'immersione affine, e che in particolare la nozione di singolrità è indipendente dall'immersione.

Definizione 0.6. Sia X una varietà quasi proiettiva, e sia $p \in X$. Consideriamo l'anello locale $\mathcal{O}_{X,p}$ e il suo ideale massimale $\mathcal{M}_p$. Allora il quoziente $\mathcal{M}_p/\mathcal{M}_p^2$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita; infatti, $\mathcal{O}_{X,p}$ è un anello noetheriano, quindi $\mathcal{M}_p$ è finitamente generato, e per una conseguenza del Lemma di Nakayama, anche $\mathcal{M}_p/\mathcal{M}_p^2$ è finitamente generato.

Lo *spazio tangente di Zariski* a X in p è definito come

$$T_pX := \left(\frac{\mathcal{M}_p}{\mathcal{M}_p^2}\right)^\vee = \operatorname{Hom}\left(\frac{\mathcal{M}_p}{\mathcal{M}_p^2}, K\right).$$

Un punto $p \in X$ si dice *liscio* o *non singolare* o *semplice* se

$$\dim T_pX = \dim X,$$

altrimenti si dice *singolare*.

L'insieme dei punti lisci si indica con X_{sm}, e quello dei punti singolari con X_{sing}.

Teorema 1. *Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà affine. Allora per ogni $p \in X$ si ha*

$$t_pX \cong T_pX.$$

Dimostrazione. Definiamo, per ogni $v = (v_1, \dots, v_n) \in t_pX$, un'applicazione lineare

$$\delta_v : \mathcal{M}_p \to K,$$

nel modo seguente: per $h \in \mathcal{M}_p$, scegliamo una rappresentazione tale che

$$h = \frac{[f]}{[g]}, \qquad f(p) = 0, \; g(p) = 1. \tag{1}$$

Allora definiamo

$$\delta_v h := d_pf(v) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

La mappa δ_v è ben definita: se $h = \frac{[f']}{[g']}$ è un'altra rappresentazione di h, con $f'(p) = 0$ e $g'(p) = 1$, abbiamo $f\,g' - f'\,g \in I(X)$, quindi $f\,g'$ e $f'\,g$ determinano la stessa funzione polinomiale su X. Segue che

$$d_p(f\,g') = d_p(f'\,g);$$

d'altra parte si ha

$$d_p(f\ g')(v) = d_pf(v)g'(p) + f(p)d_pg'(v) = d_pf(v),$$

e analogamente

$$d_p(f'\ g)(v) = d_pf'(v)g(p) + f'(p)d_pg(v) = d_pf'(v),$$

che dimostra la buona definizione.

È facile verificare che δ_v è un applicazione lineare per ogni $v \in t_pX$.

Osserviamo, inoltre, che

$$\delta_v(\mathcal{M}_p^2) = 0.$$

Infatti, $\mathcal{M}_p^2$ è generato dagli elementi del tipo

$$h = \frac{[f]}{[g]}\,\frac{[f']}{[g']},\ f(p) = f'(p) = 0,\ g(p) = g'(p) = 1.$$

Allora

$$\delta_v(h) = d_p(f\ f') = d_pf(v)\ f'(p) + f(p)\ d_pf'(v) = 0.$$

L'applicazione lineare δ_v induce quindi un'applicazione lineare, che chiamiamo ancora δ_v:

$$\delta_v : \frac{\mathcal{M}_p}{\mathcal{M}_p^2} \to K.$$

Possiamo quindi considerare l'applicazione

$$\delta : t_pX \to T_pX, \qquad \delta(v) = \delta_v,$$

che risulta lineare.

Affermiamo che δ è un isomorfismo. Mostriamo l'iniettività: supponiamo che $\delta_v \equiv 0$ per $v \in t_pX$. Allora $\delta_v(f) = 0$ per ogni $f \in \mathcal{M}_p$. In particolare

$$\delta_v(x_i - x_i(p)) = 0,$$

dove x_i è l'i-esima funzione coordinata su X. Essendo

$$\delta_v(x_i - x_i(p)) = v_i,$$

necessariamente $v = (0, \ldots, 0)$ è il vettore nullo.

Mostriamo infine la suriettività. Sia $\omega \in T_pX$, e poniamo

$$v_i := \omega(x_i - x_i(p)).$$

Per costruzione si ha

$$\omega(x_i - x_i(p)) = \delta_v(x_i - x_i(p)),$$

dove $v = (v_1, \ldots, v_n)$. È sufficiente mostrare che l'insieme $\{x_i - x_i(p), i = 1, \ldots, n\}$ genera lo spazio vettoriale $\frac{\mathcal{M}_p}{\mathcal{M}_p^2}$. Se $h = \frac{[f]}{[g]} \in \mathcal{M}_p$, allora

$$h - \frac{f}{g(p)} = \frac{f(g(p) - g)}{g\ g(p)} \in \mathcal{M}_p^2.$$

Quindi si può sempre scegliere un rappresentante in $A(X)$ per la classe modulo $\mathcal{M}_p^2$ di h. Usando l'algoritmo di divisione ogni elemento in $\mathcal{M}_p$ si può esprimere come polinomio in $x_i - x_i(p)$, e avendosi

$$(x_i - x_i(p))^d \in \mathcal{M}_p^d,$$

le classi di $x_i - x_i(p)$ in $\frac{\mathcal{M}_p}{\mathcal{M}_p^2}$ generano tale spazio. □

Teorema 2. *Sia X una varietà quasi proiettiva. Allora X_{sm} è un aperto non vuoto di X, e per ogni $p \in X$ si ha*

$$\dim T_pX \geq \dim X.$$

Dimostrazione. Abbiamo visto che X ammette un ricoprimento aperto con aperti isomorfi a varietà affini. Sia quindi $p \in U \cong \overline{X}$ con $\overline{X} = V(f_1, \dots, f_r) \subseteq \mathbb{A}^n$ varietà affine. Denotiamo con

$$J(f_1, \dots, f_r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

la matrice jacobiana dei polinomi $f_1, \dots, f_r$. Per il Teorema 1 si ha

$$\dim T_pX = \dim t_p\overline{X} = \dim \ker J(f_1, \dots, f_r) = n - \mathrm{rk}J(f_1, \dots, f_r).$$

Se consideriamo gli insiemi

$$\overline{X}_k := \{p \in \overline{X} \mid \dim t_p\overline{X} \geq k\} = \{p \in \overline{X} \mid \mathrm{rk}J(f_1, \dots, f_r) \leq n - k\},$$

sono quindi chiusi nella topologia di Zariski. Sia

$$d := \max\{k \mid \overline{X}_k = \overline{X}.\}.$$

Con tale scelta si ha

$$\overline{X} \setminus \overline{X}_{d+1} \neq \emptyset$$

è un aperto.

Claim: $\overline{X} \setminus \overline{X}_{d+1} = \overline{X}_{sm}$.

Abbiamo bisogno del seguente risultato:

Teorema 3. *Ogni varietà affine X è birazionalmente equivalente a un'ipersuperficie in $\mathbb{A}^{\dim\ X+1}$.*

Dimostrazione. Igor R. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry 1, Varieties in Projective Space, Third Edition, Teorema 1.8. □

Per il Teorema 3 che ci dice che $\overline{X}$ è birazionalmente equivalente ad una ipersuperfcie Y in $\mathbb{A}^{\dim X+1}$. Siano $V \subseteq \overline{X}$ e $W \subseteq Y$ due aperti isomorfi, denotiamo con $\alpha : V \to W$ l'isomorfismo, e consideriamo

$$W \cap Y_{sm} = \widetilde{W},$$

aperto non vuoto per la Proposizione 1, e poniamo $\widetilde{V}$ la controimmagine di $\widetilde{W}$ nell'isomorfismo. Allora per ogni $p \in \widetilde{V}$ abbiamo

$$\dim t_p\widetilde{V} = \dim t_{\alpha(p)}\widetilde{W} = \dim_{\alpha(p)} \widetilde{W} = \dim_p \widetilde{V}.$$

Infine, siccome $\widetilde{V} \cap \left(\overline{X} \setminus \overline{X}_{d+1}\right) \neq \emptyset$, necessariamente

$$\widetilde{V} = \left(\overline{X} \setminus \overline{X}_{d+1}\right),$$

e quindi $d = \dim \overline{X} = \dim X$. □

0.2 Criterio jacobiano

Teorema 4. *Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà affine, e sia $I(X) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$.*
Allora $p \in X$ è un punto liscio se e solo se

$$\operatorname{rk} J(f_1, \dots, f_r)(p) \geq n - \dim X.$$

Dimostrazione. Abbiamo visto che vale sempre

$$\dim t_pX = n - \operatorname{rk} J(f_1, \dots, f_r)(p) \geq \dim X.$$

Per definizione $p \in X$ è liscio se e solo se $\dim t_pX = \dim X$, quindi basta che sia verificata la diseguaglianza

$$n - \operatorname{rk} J(f_1, \dots, f_r)(p) \leq \dim X,$$

da cui la tesi. □

Teorema 5. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva, e sia $I_H(X) = \langle F_1, \dots, F_r \rangle$.*
Allora un punto $p \in X$ è liscio se e solo se

$$\operatorname{rk} J(F_1, \dots, F_r)(p) \geq n - \dim X,$$

dove

$$J(F_1, \dots, F_r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial F_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $p \in U_0$, $p = (1 : p_1 : \dots : p_n)$, e poniamo

$$f_i(y_1, \dots, y_n) := F_i(1, y_1, \dots, y_n).$$

Allora p è un punto liscio di $X \iff$ è un punto liscio di $X \cap U_0 \iff \varphi_0(p) = (p_1, \dots, p_n)$ è un punto liscio di $\varphi_0(X \cap U_0) = V(f_1, \dots, f_r)$, dove $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{A}^n$.

Per definizione abbiamo

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial f_j}{\partial y_i}(\varphi_0(p))$$

per ogni $j = 1, \dots, r$ e ogni $i = 1, \dots, n$.

Per determinare i valori delle derivate parziali rispetto a x_0 consideriamo l'*identità di Eulero*:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = (\deg F_j)\ F_j,$$

che è un'identità di polinomi. Valutiamo entrambi i membri in p; siccome $F_j(p) = 0$, si ha

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_0}(p) = -p_1 \frac{\partial F_j}{\partial x_1}(p) - \cdots - p_n \frac{\partial F_j}{\partial x_n}(p) =$$
$$= -p_1 \frac{\partial f_j}{\partial y_1}(p_1, \ldots, p_n) - \cdots - p_n \frac{\partial f_j}{\partial y_n}(p_1, \ldots, p_n).$$

Quindi la zeresima colonna della jacobiana omogenea $J(F_1, \ldots, F_r)(p)$ è combinazione lineare delle altre colonne, che corrispondono alle colonne della jacobiana affine, e che quindi hanno lo stesso rango. $\square$

Osservazione 2. *Per un chiuso in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ si può definire in modo analogo la jacobiana biomogenea. Applicando l'identità di Eulero due volte è facile verificare che i punti lisci sono tutti e soli quelli per cui il rango della jacobiana è massimo.*

0.3 Spazio tangente proiettivo, mappa di Gauss e Teorema di Bertini

Definizione 0.7. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva e sia $p \in X$. Supponiamo che $p \in U_0$, $p = (1 : p_1 : \cdots : p_n)$. Sia $X \cap U_0 \cong V(f_1, \ldots, f_r)$.

Lo *spazio tangente proiettivo* $\mathbb{T}_p X$ a X in p é la chiusura proiettiva dello *spazio tangente affine a X in p applicato in p*, che ha equazioni

$$V\left(\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)(x_i - p_i)\right\}\right).$$

Osservazione 3. *Usando la formula di Eulero, se $X = V_P(F_1, \ldots, F_r)$, si puó verificare che*

$$\mathbb{T}_p X = V_P\left(\left\{\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) x_i\right\}\right).$$

Definizione 0.8. Mappa di Gauss Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva liscia di dimensione k. La mappa di Gauss é per definizione il morfismo

$$\mathcal{G} : X \to \mathbb{G}(k, n),$$

$$p \to \mathbb{T}_p X.$$

Definizione 0.9. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva liscia. La *varietá delle tangenti* $T(X)$ é per definizione

$$T(X) := \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{G}(X)} \Lambda \subseteq \mathbb{P}^n.$$

Teorema 6. *La varietà delle tangenti é una varietà proiettiva di dimensione*

$$\dim T(X) \leq 2 \dim X.$$

Dimostrazione. Consideriamo la varietà di incidenza

$$\mathcal{T} := \{(p,q) \in X \times \mathbb{P}^n \mid q \in \mathbb{T}_p X\}.$$

Osserviamo che $\mathcal{T}$ é chiusa. Inoltre, se consideriamo la prima proiezione $p_1 : \mathcal{T} \to X$, le sue fibre sono tutte irriducibili e di dimensione k. Quindi $\mathcal{T}$ ha dimensione $2k$. Da ció segue che $T(X) = p_2(\mathcal{T})$ é chiusa ed ha dimensione minore o uguale a $2k$.

□

Definizione 0.10. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ varietà proiettiva liscia. Un iperipiano $H \subseteq \mathbb{P}^n$ si dice *tangente* se

$$H \supseteq \mathbb{T}_p X.$$

Teorema 7. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ varietà proiettiva liscia. L'insieme degli iperpiani tangenti corrisponde a una varietà proiettiva in $(\mathbb{P}^n)^\vee$, che si chiama varietà duale di X; tale varietà si indica con $X^\vee$.*

Dimostrazione. Consideriamo come al solito una opportuna varietà di incidenza

$$\mathcal{V} := \{(p,H) \mid H \supseteq \mathbb{T}_p X\} \subseteq X \times (\mathbb{P}^n)^\vee.$$

Le fibre della prima proiezione $p_1 : \mathcal{V} to X$ sono tutte irriducibili di dimensione $n-k-1$ (sono isomorfe a $\mathbb{P}^{n-k-1}$). Quindi $\dim \mathcal{V} = n-1$ ed essendo $X^\vee = p_2(\mathcal{V})$, si ha $\dim X^\vee \leq n-1$. □

Teorema 8. Teorema di Bertini *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva liscia. Allora esiste un aperto non vuoto $U \subset (\mathbb{P}^n)^\vee$ tale che per ogni iperpiano $H \in U$, si ha $H \cap X$ è liscio.*

Dimostrazione. Sia $H = V_P(L)$ e ricordiamo che $\dim X \cap H = \dim X - 1$. Osserviamo che se $I_H(X) = (F_1, \ldots, F_r)$, allora $I_H(X \cap H) = (F_1, \ldots, F_r, L)$. Inoltre, essendo X liscia per ipotesi, per il criterio jacobiano del Teorema **??** abbiamo

$$\mathrm{rk} J(F_1, \ldots, F_r)(p) \geq n - \dim X, \tag{2}$$

per ogni $p \in X$.

Analogamente si avrá che $X \cap H$ é liscia se e solo se per ogni punto $p \in X \cap H$ si ha

$$\mathrm{rk} J(F_1, \ldots, F_r, L)(p) \geq n - \dim X + 1. \tag{3}$$

Essendo $L = a_0 x_0 + a_n x_n$ un polinomio lineare omogeneo, la sua derivata parziale rispetto a x_i coincide con il coefficiente a_i. Dall'algebra lineare segue che (3) vale se e solo se la riga $(a_0 \ldots a_n)$ é liearmente dipendente dalle altre righe, cioé se e solo se, $\forall p \in X \cap H$, l'iperpiano H non appartiene al fascio di iperpiani tangente

$$\alpha_1 \nabla F_1(p) \begin{pmatrix} x_0 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_r \nabla F_r(p) \begin{pmatrix} x_0 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

e quindi se e solo se, $\forall p \in X cap H$, si ha che H non contiene lo spazio tangente proiettivo. Tali H sono parametrizzati da un chiuso proprio di $(\mathbb{P}^n)^\vee$ per il Teorema 7. □

Corollario 1. *La generica ipersuperficie di grado d in $\mathbb{P}^n$ è liscia.*

Proposizione 2. Curve piane singolari: *sia $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d)$ con $d \geq 2$ e si consideri*

$$X := \{(p, [F]) \mid p \in V_P(F)_{sing} \subset \mathbb{P}^2\} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^N.$$

Allora:

- *X è un chiuso di $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^N$;*
- *si ha che $\dim X = N - 1$;*
- *il sottoinsieme di $\mathbb{P}^N$ corrispondente alle curve singolari è un'ipersuperficie.*

Dimostrazione. Esercizio. □