PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA - A.A. 2017/18

CORSI DI LAUREA IN INGEGNERIA NAVALE ED INDUSTRIALE

Trieste, 10/07/2018 *Prof. Dario Portelli*

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate

1.– Si verifichi che l' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y \\ x - y \\ 3\,y \end{bmatrix}$$

è iniettiva. Dopo aver determinato una base di $Im(f)$, la si completi ad una base $\mathscr{B}$ di $\mathbb{R}^3$. Infine si trovi, se esiste, un' applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$g \circ f \,=\, id_{\mathbb{R}^2}$$

2.– Sia V uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali, di dimensione n , e sia $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una sua base fissata. Infine, sia j un numero intero fissato, con $1 \leq j < n$.

i) Si verifichi che l' applicazione

$$f(a_1\, v_1 + \ldots + a_n\, v_n) \,=\, a_1\, v_1 + \ldots + a_j\, v_j$$

è un endomorfismo di V.

ii) f è diagonalizzabile ?

iii) Si verifichi che $V = Ker(f) \oplus Im(f)$.

iv) Si verifichi che $f \circ f = f$.

3.– i) Si dica se la forma bilineare su $\mathbb{R}^4$ data da

$$(*) \qquad g\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \right) = v_1 w_1 - v_3 w_2 + v_2 w_3 + 2 v_4 w_4$$

è un prodotto scalare o meno.

ii) Se U è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori e_1 ed e_2 della base canonica, si determini $U^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^4 \,|\, g(u,w) = 0 \ \ \forall u \in U \}$, per esempio mediante una sua base.

iii) Si dica se $U + U^\perp$ è una somma diretta o meno.

iv) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato da e_1 , $2e_2 + e_3$, e_4 . Allora abbiamo un' applicazione

$$g' : W \times W \to \mathbb{R} \qquad \text{data da} \qquad g'(w_1\,,\,w_2) \;=\; g(w_1\,,\,w_2)$$

Si dica se g' è un prodotto scalare su W, o meno.

4.– Siano $\alpha\,,\beta$ e γ tre piani distinti nello spazio affine $\mathbb{A}^3$, di equazioni, rispettivamente

$$ax + by + cz = d \qquad a'x + b'y + c'z = d' \qquad a''x + b''y + c''z = d''$$

Sia poi P un punto fissato di $\mathbb{A}^3$. Si descriva in tutti i casi possibili l' insieme di tutte le rette passanti per P e parallele a ciascuno dei tre piani.