ESERCIZIO 1

$f = L_A$ dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ Le colonne di A generano $\mathrm{Im}(f)$. Si vede subito che sono linearmente indip., dunque $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

Per il teorema di dimensione di un'applicazione lineare si ha, allora $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2-2 = 0$, quindi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, dunque <u>$f$ è iniettiva.</u>

Una base di $\mathrm{Im}(f)$ l'abbiamo già trovata : $\underset{\shortparallel}{\overset{v_2}{}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underset{\shortparallel}{\overset{v_3}{}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Aggiungendole $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ la completiamo ad una base di $\mathbb{R}^3$.

Per il teorema di determinazione di un'applicazione lineare, ponendo

$$g(e_1) \in \mathbb{R}^2 \text{ qualsiasi} \qquad g(v_2) = e_1 \qquad g(v_3) = e_2$$

definiamo univocamente un'appl. lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

$$(g \circ f)(e_1) = g(f(e_1)) = g(v_2) = e_1 \qquad (g \circ f)(e_2) = \ldots = e_2$$

Dunque $g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$

ESERCIZIO 2

Verifico i)

$u = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \qquad w = b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n \qquad u, w \in V$ qualsiasi

$u + w = (a_1 + b_1) v_1 + \ldots + (a_n + b_n) v_n$. Allora

$$f(u+w) = (a_1+b_1)v_1 + \ldots + (a_j+b_j)v_j = \underbrace{a_1 v_1 + \ldots + a_j v_j}_{f(u)} + \underbrace{b_1 v_1 + \ldots + b_j v_j}_{f(w)}.$$

$\lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda u = \lambda a_1 v_1 + \ldots + \lambda a_n v_n$

$$f(\lambda u) = \lambda a_1 v_1 + \ldots + \lambda a_j v_j = \lambda (a_1 v_1 + \ldots + a_j v_j) = \lambda f(u)$$

Dalla def. di f segue subito che $f \circ f = f$, cioè iv).

ii)

$$M_{\mathcal{B}}(f)=\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\ 0&1&\cdots&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&1&0&\cdots&0\\ 0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0&0&\cdots&0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_j\\ v_{j+1}\\ \vdots\\ v_n \end{array}\\ \begin{array}{ccccccc} f(v_1)&f(v_2)&\cdots&f(v_j)&f(v_{j+1})&\cdots&f(v_n) \end{array} & \end{array}$$

è già una matrice diagonale!

Gli autovalori sono $\lambda=1$ e $\lambda=0$. Gli autospazi

W_1 è generato da $v_1, v_2, \dots, v_j \Rightarrow \dim(W_1)=j$

W_0 " " " $v_{j+1}, \dots, v_n \Rightarrow \dim(W_0)=n-j$

$W_0 = Ker(f)$. $W_1 = Im(f)$

iii)

$Ker(f)+Im(f)=W_0+W_1$ ha per sistema di generatori $\{v_{j+1}, \dots, v_n\} \cup \{v_1, \dots, v_j\} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dunque $Ker(f)+Im(f)=V$. Per la formula di Grassmann si ha, allora che $\dim(Ker(f)\cap Im(f)) = (n-j)+j-n=0$, dunque $Ker(f)\cap Im(f)=\{0_V\}$ e la somma $Ker(f)+Im(f)$ è, allora, diretta.

ESERCIZIO 3

Da ✱) segue subito che $g(e_2,e_2)=0$, dunque g non può essere un prodotto scalare. E i) è risolto.

ii) ae_1+be_2 è l'elemento generico di U

Dunque si cercano i $w \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$g(ae_1+be_2, w)=0 \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

Si verifica immediatamente che

$$g\left(\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&0&2\end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{bmatrix} \quad \forall v,w \in \mathbb{R}^4$$

Dunque g è bilineare

Allora: $0 = g(ae_1 + be_2, w) = a\,g(e_1, w) + b\,g(e_2, w)$

Quindi è (necessario e) sufficiente che w verifichi le due relazioni

$$g(e_1, w) = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ | \\ w_4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{w_1 = 0}}$$

$$g(e_2, w) = 0 \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ | \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ | \\ w_4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{w_3 = 0}}$$

$U^\perp$ è quindi l'insieme di tutte le soluzioni del SLO

$$\begin{cases} w_1 = 0 \\ w_3 = 0 \end{cases}$$

una base di $U^\perp$ è, allora $\{e_2, e_4\}$

---

iii) $e_2 \in U$ e $e_2 \in U^\perp \Rightarrow U \cap U^\perp \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\} \Rightarrow$

$U + U^\perp$ non è una somma diretta.

---

iv) $u_1 = e_1 \qquad u_2 = 2e_2 + e_3 \qquad u_3 = e_4$ è base di W

Calcolo la matrice di Gram di g' rispetto a tale base

$$\begin{bmatrix} g'(u_1, u_1) & g'(u_1, u_2) & g'(u_1, u_3) \\ g'(u_2, u_1) & g'(u_2, u_2) & g'(u_2, u_3) \\ g'(u_3, u_1) & g'(u_3, u_2) & g'(u_3, u_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$g'(u_2, u_2) = g(2e_2 + e_3, 2e_2 + e_3) = 4\underbrace{g(e_2, e_2)}_{=0} + 2\underbrace{g(e_2, e_3)}_{=1} + 2\underbrace{g(e_3, e_2)}_{-1} + \underbrace{g(e_3, e_3)}_{=0}$$

No, neanche g' è un prodotto scalare. $\qquad = 0$

ESERCIZIO 4

Avendo un punto (cioè: P), per determinare una retta ci manca solo una direzione, cioè un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$, di dimensione 1.

$r = P + W$ sarà una retta $\parallel \alpha \iff W$ è contenuto nell'insieme ~~V~~ U (è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$) di tutte le soluzioni di

$ax + by + cz = 0$ (questa è l'equazione della giacitura del piano α).

Quindi consideriamo il SLO:

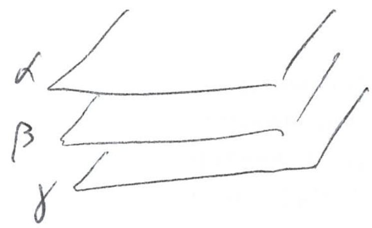
$$(*) \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \\ a''x + b''y + c''z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$$

la sua m. dei coefficienti

$1 \le rg(A) \le 3$

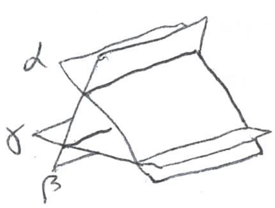
$rg(A) = 1 \iff \dim(U) = 2$ ci sono infiniti sottosp. $W \subset U$, con $\dim(W) = 1$

↑ accade se e solo se α, β, γ sono a due a due paralleli



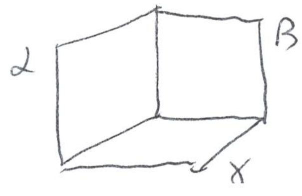
le rette cercate formano un fascio; sono tutte contenute nel piano per P, parallelo ad α

$rg(A) = 2 \iff \dim(U) = 1$ quindi $U = W$



Vi è una sola retta soluzione del problema

$rg(A) = 3 \iff \dim(U) = 0$ quindi U non può contenere sottospazi vettoriali di dimensione 1.



Non ci sono soluzioni del nostro problema.