Note di Istituzioni di Geometria Superiore 3

15 luglio 2018

Indice

0.1 Topologia di Zariski su $\mathbb{A}^n$

Definizione 0.1 (Insieme algebrico)**.** Consideriamo lo spazio affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ su un campo K. Un insieme algebrico affine è un sottoinsieme del tipo

$$V(\mathcal{F}) := \{P = (p_1, \dots, p_n);\ f(p_1, \dots, p_n) = 0,\ \forall f \in \mathcal{F}\}, \qquad \mathcal{F} \subseteq K[x_1, \dots, x_n].$$

Esempio 0.2. Alcuni semplici esempi sono:
1. $V(\{0\}) = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.
2. $V(\{c\}) = \emptyset$, dove c denota un polinomio costante in $K[x_1, \dots, x_n]$.

Definizione 0.3 (Ipersuperficie di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$)**.** Diremo che $V(\mathcal{F})$ è una ipersuperficie di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ se $V(\mathcal{F}) = V(\{f\})$. In tal caso indicheremo l'insieme algebrico affine con $V(f)$.

Osservazione 0.4. Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$. Allora si ha $V(\mathcal{F}) \supseteq V(\mathcal{G})$.

Proposizione 1. *Sia $\mathcal{F} \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ e sia $\alpha = (\mathcal{F})$ l'ideale generato da $\mathcal{F}$ nell'anello dei polinomi. Allora vale*

$$V(\mathcal{F}) = V(\alpha).$$

Dimostrazione. Ricordiamo che

$$\alpha = (\mathcal{F}) = \{\sum_{i \in I} H_i f_i \mid I \text{ finito},\ f_i \in \mathcal{F}\ ,\ H_i \in K[x_1, \dots, x_n]\}. \tag{1}$$

Essendo $\mathcal{F} \subseteq \alpha$, per l'Osservazione 0.4 abbiamo $V(\mathcal{F}) \supseteq V(\alpha)$.

Sia ora $P \in V(\mathcal{F})$; usando la (1) si può facilmente verificare che P annulla tutti i polinomi di α, quindi $V(\mathcal{F}) \subseteq V(\alpha)$. □

Teorema 0.5 (Teorema della base di Hilbert)**.** *Sia A un anello noetheriano. Allora $A[x]$ è noetheriano.*

Corollario 1. *Se A è noetheriano, anche $A[x_1, \dots, x_n]$ è noetheriano.*

In particolare se K è un campo, l'anello dei polinomi $K[x_1, \dots, x_n]$ è noetheriano.

Dimostrazione. La prima parte del corollario si prova per induzione sul numero delle indeterminate. Per quanto riguarda la seconda parte, è sufficiente osservare che K, essendo un campo, i suoi unici ideali sono gli ideali banali e quindi principali, in particolare finitamente generati.

□

Corollario 2. *Ogni insieme algebrico ha un numero finito di equazioni.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F} \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ e consideriamo $V(\mathcal{F})$ insieme algebrico. Per la Proposizione 1 abbiamo $V(\mathcal{F}) = V(\alpha)$ dove $\alpha = (\mathcal{F})$, inoltre $\alpha = (f_1, \dots, f_k)$ poichè $K[x_1, \dots, x_n]$ è noetheriano, da cui $V(\alpha) = V(f_1, \dots, f_k)$, ancora dalla proposizione 1.

□

Proposizione 2. *Gli insiemi algebrici affini verificano gli assiomi per i chiusi di una topologia sullo spazio affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.*

Dimostrazione. Verifichiamo i tre assiomi:
(**Insiemi banali**) $V(\{0\}) = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, $V(\{1\}) = \emptyset$.

(**Unioni finite**) Siano $V(\alpha)$, $V(\beta)$ insiemi algebrici affini. Si ha che $V(\alpha) \cup V(\beta) = V(\alpha\beta)$, dove $\alpha\beta = \{\sum_{\text{finite}} f_i g_i;\ f_i \in \alpha,\ g_i \in \beta\}$.
Infatti:
($\subseteq$) $\alpha\beta \subseteq \alpha\cap\beta \subseteq \alpha, \beta$, quindi $V(\alpha) \subseteq V(\alpha\beta),\ V(\beta) \subseteq V(\alpha\beta)$, da cui $V(\alpha)\cup V(\beta) \subseteq V(\alpha\beta)$.
($\supseteq$) Sia $P \in V(\alpha\beta)$ e si supponga $P \notin V(\alpha)$. Allora esiste un poinomio $\overline{f} \in \alpha$ tale che $\overline{f}(P) \neq 0$. D'altra parte, poichè $P \in V(\alpha\beta)$, abbiamo che $\overline{f}(P)g(P) = 0$, per ogni $g \in \beta$. Quindi $g(P) = 0$ per ogni $g \in \beta$, dato che un campo è un dominio d'integrità. Concludiamo che $P \in V(\alpha) \cup V(\beta)$.
Per induzione si dimostra che una propietà analoga vale per le unioni finite.

(**Intersezioni arbitrarie**) Sia $\{V(\alpha_i)\}_{i\in I}$ una famiglia arbitraria di insiemi algebrici affini. Affermiamo che

$$\bigcap_{i\in I} V(\alpha_i) = V(\sum_{i\in I} \alpha_i),$$

dove $\sum_{i\in I} \alpha_i = \{\sum_{\text{finite}} H_i f_i;\ f_i \in \alpha_i, H_i \in K[x_1, \ldots, x_n]\}$
Infatti:
($\supseteq$) $\alpha_j \subseteq \sum \alpha_i,\ \forall j \in I \Rightarrow V(\sum \alpha_i) \subseteq V(\alpha_j),\ \forall j \in I \Rightarrow V(\sum \alpha_i) \subseteq \bigcap V(\alpha_i)$.
($\subseteq$) Si verifica facilmente che $P \in \bigcap V(\alpha_i) \Rightarrow P \in V(\sum \alpha_i)$. □

Definizione 0.6 (Topologia di Zariski)**.** Sia K un campo e sia $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ uno spazio affine. La topologia su $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ che ha come chiusi gli insiemi algebrici affini si chiama topologia di Zariski.

Esempio 0.7. Studiamo la topologia di Zariski nei casi più semplici; supponiamo K campo infinito:
1. topologia di Zariski su $\mathbb{A}^1_K$: essendo $K[x]$ un PID, ogni ideale è principale: $\alpha = (f)$; dunque $V(\alpha) = V(f)$, da cui segue che ogni insieme algebrico affine è vuoto oppure è un numero finito di punti (di cardinalita' al più uguale al grado di f). Ma allora in questo caso la topologia di Zariski coincide con la topologia del complemento finito su $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$. In particolare, se K è infinito, anche $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ è un insieme infinito e con la topologia di Zariski non è uno spazio topologico di Hausdorff. Risulta invece uno spazio $T1$ e ogni aperto è denso.
2. topologia di Zariski su $\mathbb{A}^2_K$: i chiusi in questo spazio sono del tipo$V(\alpha)$ con $\alpha \subseteq K[x, y]$ che non è un PID; se $\alpha = (f)$, il chiuso $V(f)$ è una curva algebrica affine; in generale $V(\alpha) = V(f_1, \ldots, f_k) = V(f_1) \cap \ldots \cap V(f_k)$ può essere un insieme di curve, un insieme di punti o una combinazione delle due cose (oltre che l'insieme vuoto e tutto il piano affine).

Osservazione 0.8. Lo spazio la topologia di Zariski è T1. Infatti, se $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, si ha

$$p = V(x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n).$$

Osservazione 0.9 (Sulla topologia prodotto). Ossetviamo che $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$, tuttavia la topologia di Zariski $Zar(\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}})$ differisce dalla topologia prodotto $Zar(\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}) \times$

$Zar(\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}})$. Infatti, ricordiamo il risultato di topologia che afferma che la diagonale $\Delta = \{(x,x)\} \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ è chiusa nella topologia prodotto se e solo se lo spazio topologico considerato è di Hausdorff. Quindi nel nostro caso Δ non è chiusa nel prodotto. Nella topologia di Zariski su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ risulta

$$\Delta = V(x-y),$$

quindi è un chiuso.

Proposizione 3. *Lo spazio topologico la topologia di Zariski non è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la topologia di Zariski sia di Hausdorff. Ciò implica che ogni suo sottospazio è di Hausdorff. Consideriamo la retta affine $L = V(x_2, \ldots, x_n)$; possiamo identificare L con $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ tramite la biiezione

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \to L, \qquad x \to (x, 0, \ldots, 0).$$

Affermiamo che la topologia indotta da $Zar(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ su $V(x_2, \ldots, x_n)$ coincide con $Zar(\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}})$.

Osserviamo che ogni chiuso proprio di $\mathbb{A}^1$ è a un insieme finito di punti su L, che sono chiusi anche nella topologia di Zariski di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e pertanto sono chiusi nella topologia indotta.

Viceversa, se $V(\alpha)$ è un chiuso in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, nella topologia indotta abbiamo il chiuso

$$V(\alpha) \cap V(x_2, \ldots, x_n) = V(f_1, \ldots, f_k) \cap V(x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= V(f_1(x_1, 0, \ldots, 0), \ldots, f_k(x_1, 0, \ldots, 0)),$$

che determina un chiuso di $\mathbb{A}^1$. Ciò implica che L non è di Hausdorff, che è assurdo.

□

Osservazione 0.10 (Base per la topologia di Zariski). Determiniamo una base di aperti per la topologia di Zariski: se $V(\alpha) = V(f_1, \ldots, f_k) = V(f_1) \cap \ldots \cap V(f_k)$ è un chiuso, il suo complementare è dato da

$$U = \mathbb{A}^n \setminus (V(f_1) \cap \ldots \cap V(f_k)) = (\mathbb{A}^n \setminus V(f_1)) \cup \ldots \cup (\mathbb{A}^n \setminus V(f_k)).$$

Una base per $Zar(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ è dunque $\{D_f;\ f \in K[x_1, \ldots, x_n]\}$. Gli aperti

$$D_f := \mathbb{A}^n \setminus V(f)$$

sono detti *aperti principali*.

0.2 Teorema degli zeri di Hilbert

Abbiamo visto che ad ogni ideale di $K[x_1, \ldots, x_n]$ è possibile associare in modo unico un chiuso della topologia di Zariski su $\mathbb{A}^n_K$. Vediamo ora che è possibile anche fare l'operazione opposta, cioè associare in modo unico un ideale di $K[x_1, \ldots, x_n]$ ad ogni sottoinsieme dello spazio affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. In generale questa corrispondenza non è biunivoca.

Definizione 0.11 (Ideale di un insieme)**.** Sia $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un sottoinsieme. Definiamo

$$I(Y) := \{f \in K[x_1, \ldots, x_n];\ f(P) = 0,\ \forall P \in Y\}$$

l'ideale associato ad Y.

Esempio 0.12. Si ha:

1. $I(\emptyset) = K[x_1, \ldots, x_n]$.

2. Se il campo K è infinito, allora $I(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = (0)$; infatti, se $f \in I(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$, f si annulla in particolare su $V(x_2, \ldots, x_n) = \mathbb{A}^1_K$; ciò implica che $f(x_1, 0, \ldots, 0)$ ha infiniti zeri, quindi è il polinomio nullo. Analogamente osserviamo che $f(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$ è il polinomio nullo per ogni $i = 2, \ldots, n$. Quindi f non contiene indeterminate, cioè f è un polinomio costante, ed avendo degli zeri è il polinomio nullo.

3. Sia $Y = \{P\} = \{(a_1, \ldots, a_n)\} \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. In questo caso l'ideale di Y è dato da

   $$I(Y) = I(P) = ((x_1 - a_1), \ldots, (x_n - a_n));$$

   infatti, l'ideale $((x_1 - a_1), \ldots, (x_n - a_n)) \subseteq I(P)$ perchè ogni polinomio in $((x_1 - a_1), \ldots, (x_n - a_n))$ si annulla in P. Mostriamo che vale anche l'inclusione opposta.

   Sia $f \in I(P)$; quindi $f(P) = 0$. Applichiamo l'algoritmo di divisione nell'anello dei polinomi $K[x_2, \ldots, x_n][x_1]$ a coefficienti nel dominio $K[x_2, \ldots, x_n]$, e dividiamo il polinomio f per il binomio $(x_1 - a_1)$; esistono allora due polinomi $q_1, r_1 \in K[x_2, \ldots, x_n][x_1]$ tali che

   $$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 - a_1)q_1(x_1, \ldots, x_n) + r_1(x_1, \ldots, x_n),$$

   con $deg_{x_1}(r_1) < deg(x_1 - a_1) = 1$, cioè r_1 costante in x_1:

   $$r_1 = r_1(x_2, \ldots, x_n).$$

   A questo punto dividiamo il polinomio $r_1 \in K[x_3, \ldots, x_n][x_2]$ per il binomio $(x_2 - a_2)$. Con un analogo ragionamento si ottiene dunque:

   $$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= (x_1 - a_1)q_1(x_1, \ldots, x_n) + r_1(x_1, \ldots, x_n) = \\ &= (x_1 - a_1)q_1(x_1, \ldots, x_n) + (x_2 - a_2)q_2(x_2, \ldots, x_n) + r_2(x_3, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

   Reiterando questo ragionamento si ottiene infine un'espressione del polinomio f del tipo:

   $$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 - a_1)q_1 + \ldots + (x_n - a_n)q_n + c,\ c \in K.$$

   Siccome $f(P) = 0$, otteniamo $c = 0$, quindi

   $$f \in ((x_1 - a_1), \ldots, (x_n - a_n)),$$

cioè $f \in ((x_1-a_1), \dots, (x_n-a_n))$. In conclusione si ha che $((x_1-a_1), \dots, (x_n-a_n)) = I(P)$.

L'afffermazione si può verificare in modo alternativo osservando che l'insieme $\{1, (x_1-a_1)^{i_1}, \dots, (x_n-a_n)^{i_n}\}_{i_1,\dots,i_n \in \mathbb{N}}$ costituisce una base per $K[x_1, \dots, x_n]$ come K-spazio vettoriale.

Proposizione 4. *Siano* $Y, Y' \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$*. Si ha:*

1. $Y \subseteq Y' \Rightarrow I(Y) \supseteq I(Y')$
2. $I(Y \cup Y') = I(Y) \cap I(Y')$
3. $I(Y \cap Y') \supseteq I(Y) + I(Y')$

Osservazione 0.13. L'inclusione $I(Y \cap Y') \supseteq I(Y) + I(Y')$ è in generale stretta; ad esempio siano $Y = \{y = 0\}$ e $Y' = \{y = x^2\}$ in $\mathbb{A}^2$. In questo caso $Y \cap Y' = \{(0,0)\}$, quindi $I(Y \cap Y') = (x, y)$; d'altra parte $I(Y) = (y)$, $I(Y') = (x^2 - y)$ e quindi

$$I(Y) + I(Y') = (I(Y) \cup I(Y')) = (y, x^2 - y) = (y, x^2) \subsetneq (x, y).$$

Definizione 0.14 **(Ideale radicale).** Sia A un anello e sia $\alpha \subseteq A$ un ideale. Si dice radicale di α l'deale

$$\sqrt{\alpha} = \{f \in A \mid \exists\, n \in \mathbb{N}\ t.c.\ f^n \in \alpha\}.$$

Si ha l'inclusione $\alpha \subseteq \sqrt{\alpha}$.

Diremo che α è un ideale radicale se

$$\sqrt{\alpha} = \alpha.$$

Se α è un ideale radicale, allora $A/\sqrt{\alpha}$ è un anello ridotto, cioè non ha elementi nilpotenti.

Proposizione 5. *Sia* $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$*. Allora* $I(Y)$ *è un ideale radicale.*

Dimostrazione. Abbiamo sempre l'inclusione $I(Y) \subseteq \sqrt{I(Y)}$. Viceversa, sia $f \in \sqrt{I(Y)}$; allora esiste $n > 0$ tale che $f^n \in I(Y)$;ciò implica che $f^n(P) = (f(P))^n = 0$ per ogni $P \in Y$, ma K è un campo e quindi $f(P) = 0$ per ogni $P \in Y$,cioè $f \in I(Y)$. □

Lemma 0.15. *Valgono le seguenti:*

1. $\alpha \subseteq I(V(\alpha))$ *ed in generale l'inclusione è stretta.*
2. $V(I(Y)) = \overline{Y}$ *nella topologia di Zariski.*

Dimostrazione. Il primo punto è semplice. Per quanto riguarda il secondo punto, per definizione di chiusura $\overline{Y}$ è il più piccolo chiuso di $Zar(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ contenente Y. Consideriamo un arbitrario chiuso $V(\beta)$ tale che $Y \subseteq V(\beta)$. Per il primo punto si ha $I(Y) \supseteq I(V(\beta)) \supseteq \beta$. Ma allora $V(I(Y)) \subseteq V(\beta)$, quindi $V(I(Y))$ è contenuto in tutti i chiusi che contengono Y. □

Osservazione 0.16. Otteniamo da questo lemma la seguente corrispondenza

$$\{I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n];\ I \text{ ideale}\} \rightleftarrows \{\text{chiusi di Zariski}\} \tag{2}$$

In generale non è una corrispondenza biunivoca, ma si ha che $V \circ I = Id$

Vediamo ora un risultato fondamentale, il Teorema degli zeri di Hilbert. Come conseguenza avremo, in particolare, che su un campo algebricamente chiuso, l'applicazione V ristretta all'insieme degli ideali radicali è iniettiva.

Vediamo prima un risultato algebrico.

Lemma 0.17. *Sia K un campo e sia L una K-algebra finitamente generata. Se L è un campo, allora $K \subseteq L$ è un'estensione di campi finita.*

Teorema 0.18 (Teorema degli zeri di Hilbert o Nullstellensatz - NSS)**.** *Sia $K = \overline{K}$ è un campo algebricamente chiuso. Allora*

$$I(V(\alpha)) = \sqrt{\alpha}.$$

Dimostrazione. Suddividiamo la dimostrazione in passi:

1. Primo passo: su un campo algebricamente chiuso, un ideale $\mathfrak{M} \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ è massimale se e solo se esistono $a_1, \ldots, a_n \in K$ tali che

$$\mathfrak{M} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n).$$

2. $V(\beta) \neq \emptyset$ se e solo se β è un ideale proprio di $K[x_1, \ldots, x_n]$; questo risultato viene detto *forma debole* del NSS.

3. $I(V(\alpha)) \subseteq \sqrt{\alpha}$.

1. Osserviamo che $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ è un ideale massimale, in quanto

$$\frac{K[x_1, \ldots, x_n]}{(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)} \cong K.$$

Viceversa, supponiamo $\mathfrak{M}$ ideale massimale e poniamo $L := \frac{K[x_1, \ldots, x_n]}{\mathfrak{M}}$; L è un campo che contiene K come sottocampo e risulta essere una K-algebra finitamente generata; infatti, è generata dalle classi delle indeterminate modulo $\mathfrak{M}$. Quindi $K \subseteq L$ è un'estensione finita e per il Lemma 0.17 $K \subseteq L$ è un'estensione algebrica. Ma $K = \overline{K}$, quindi c'è un isomorfismo

$$\phi : L = \frac{K[x_1, \ldots, x_n]}{\mathfrak{M}} \xrightarrow{\cong} K$$

Poniamo

$$a_i := \phi(x_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

e consideriamo l'omomorfismo di valutazione in $p = (a_1, \ldots, a_n)$

$$\begin{aligned} eval_p \colon K[x_1, \ldots, x_n] &\longrightarrow K \\ x_i &\longmapsto a_i,\ \forall i. \end{aligned}$$

Abbiamo la seguente sequenza:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{M} \arrow[r, "i"] & K[x_1,\dots,x_n] \arrow[rr, "eval_p"] \arrow[drr, "\alpha"'] & & K \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & 0 \\
& & & & \frac{K[x_1,\dots,x_n]}{\mathfrak{M}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dunque per esattezza si deve avere necessariamente che $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = ker(eval) \cong \mathfrak{M}$.
2. Sia $\beta \subset K[x_1, \dots, x_n]$ un ideale proprio; allora esiste un ideale massimale $\mathfrak{M} \supseteq \beta$. Si ha

$$V(\beta) \supseteq V(\mathfrak{M}) = V(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = \{(a_1, \dots, a_n)\},$$

perciò $V(\beta) \neq \emptyset$.

Viceversa, sia $V(\beta) \neq \emptyset$; allora esiste $P = (a_1, \dots, a_n) \in V(\beta)$, quindi $I(P) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \supseteq I(V(\beta)) \supseteq \beta$, dunque β è un ideale proprio.
3. Sia $f \in I(V(\alpha))$ e supponiamo $\alpha = (g_1, \dots, g_s)$. Se $P \in V(\alpha)$, si ha per definizione

$$g_1(P) = 0, \dots, g_s(P) = 0 \Rightarrow f(P) = 0.$$

Aggiungiamo un'indeterminata ausiliaria t e nell'anello $K[x_1, \dots, x_n, t]$ consideriamo l'ideale

$$J := (g_1, \dots, g_s, f(x_1, \dots, x_n)t - 1).$$

Si ha che

$$V(J) = \{(P, a) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1 \mid g_1(P) = 0, \dots, g_s(P) = 0,\ f(P)a = 1\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}.$$

Ora $g_1(P) = 0, \dots, g_s(P) = 0 \Rightarrow f(P) = 0$ e quindi $V(J) = \emptyset$; dal passo precedente $J = K[x_1, \dots, x_n, t]$ e in particolare $1 \in J$. Dunque si ha

$$1 = h_1 g_1 + \ldots + h_s g_s + h_{s+1}(ft - 1), \ \text{ con } h_i \in K[x_1, \dots, x_n, t]. \tag{3}$$

Vogliamo adesso eliminare la variabile ausiliaria: consideriamo il campo dei quozienti $\mathcal{Q}(K[x_1, \dots, x_n]) = K(x_1, \dots, x_n)$ e definiamo l'omomorfismo:

$$\varphi \colon K[x_1, \dots, x_n, t] \longrightarrow K(x_1, \dots, x_n)$$
$$1 \mapsto 1, \quad x_i \mapsto x_i, \quad t \mapsto \frac{1}{f}$$

L'immagine dell'uguaglianza (3) fornisce

$$\begin{aligned} 1 = \varphi(1) &= \varphi(h_1 g_1 + \ldots + h_s g_s + h_{s+1}(ft - 1)) = \\ &= \overline{h}_1 g_1 + \ldots + \overline{h}_s g_s + \overline{h}_{s+1}(f\frac{1}{f} - 1) = \\ &= \overline{h}_1 g_1 + \ldots + \overline{h}_s g_s \end{aligned}$$

dove $\varphi(g_i) = g_i$ e $\overline{h}_i = h_i(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{f})$. Ma gli elementi $\overline{h}_i$ hanno a denominatore una potenza di f, e moltiplicando per la potenza massima si ottiene:

$$f^k = h'_1 g_1 + \ldots + h'_s g_s, \quad h'_i \in K[x_1, \dots, x_n].$$

Questo implica che $f^k \in \alpha$, e dunque $f \in \sqrt{\alpha}$. Abbiamo dimostrato che $I(V(\alpha)) \subseteq \sqrt{\alpha}$. Poichè l'altra inclusione è sempre vera, il teorema è dimostrato. $\square$

Corollario 3. *Se $K = \overline{K}$ allora la corrispondenza*

$$V : \{\text{ideali radicali di } K[x_1, \ldots, x_n]\} \to \{\text{chiusi di Zariski di } \mathbb{A}^n\}$$

è una biiezione.

Osservazione 0.19. Non è difficile verificare che se il campo non è algebricamente chiuso il teorema degli zeri di Hilbert non vale. Ad esempio sia $\alpha = (x^2 + 1) \subseteq \mathbb{R}[x]$;l'ideale α è radicale; infatti $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{C}$ campo e quindi α è massimale e perciò è radicale. Ma $V(x^2 + 1) = \emptyset$ e $I(V(x^2 + 1)) = I(\emptyset) = \mathbb{R}[x]$.

La forma debole del NSS ha come conseguenza il seguente risultato.

Proposizione 6. *Se $K = \overline{K}$ allora $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ con la topologia di Zariski è quasi compatto, cioè ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.*

Dimostrazione. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Poichè l'insieme degli aperti fondamentali della forma $D_f = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \setminus V(f)$ forma una base per la topologia di Zariski, si ha che

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{j \in J} D_{f_j}.$$

Perciò

$$\emptyset = (\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})^c = \bigcap_{j \in J} D^c_{f_j} = \bigcap_{j \in J} V(f_j).$$

Poniamo $S = \{f_j \mid j \in J\}$; si ha $\emptyset = V(\{f_j\}_{j \in J}) = V((S))$, e per la forma debole di NSS abbiamo che l'ideale generato da S non è proprio: $(S) = (1)$. Quindi

$$1 = h_1 f_1 + \ldots + h_s f_s,$$

per un numero finito di opportuni elementi $f_i \in S$ e $h_j \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Ma allora $1 \in (f_1, \ldots, f_s)$, quindi

$$V((1)) = \emptyset = V(f_1, \ldots, f_s) = V(f_1) \cap \ldots \cap V(f_s),$$

da cui passando ai complementari si ottiene:

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = D_{f_1} \cup \ldots \cup D_{f_s}.$$

Infine, siccome per ogni D_{f_j} per $j = 1, \ldots, s$ esiste $U_{i(j)} \in \{U_i\}_{i \in I}$ tale che

$$U_{i(j)} \supseteq D_{f_j}$$

per costruzione, la proposizione è dimostrata. □