Note di Istituzioni di Geometria Superiore 3

12 luglio 2018

Indice

0.1 Irriducibilità

Definizione 0.1 (Spazio irriducibile)**.** Uno spazio topologico X si dice riducibile se esistono due chiusi propri C_1, C_2 tali che

$$X = C_1 \cup C_2.$$

Se X non è riducibile, allora si dice irriducibile.

Esempio 0.2. Se X è uno spazio topologico di Hausdorff, gli unici sottospazi irriducibili sono i punti.

Infatti, se X ha almeno due punti ed è di Hausdorff allora esistono intorni disgiunti di tali punti U_1, U_2. I complementari $C_i = U_i^c$ sono chiusi propri di X e sono tali che $X = C_1 \cup C_2$.

Lemma 0.3. *Sia X uno spazio topologico irriducibile. Allora ogni aperto $U \subseteq X$ è denso.*

Dimostrazione. Se $U = X$ la tesi è chiara. Sia quindi $U \subset X$ un aperto e upponiamo per assurdo che $\overline{U} \neq X$. Ma allora $X = \overline{U} \cup U^c$ con $\overline{U}$ e U^c chiusi propri. □

Corollario 1. *Sia X uno spazio topologico irriducibile e siano $U, V \subseteq X$ aperti non vuoti. Allora $U \cap V \neq \emptyset$*

Dimostrazione. Sia $p \in V$ un punto arbitrario. Per il Lemma precedente $p \in \overline{U}$, ed essendo V un intorno aperto di p, si ha per definizione di chiusura topologica

$$V \cap U \neq \emptyset.$$

□

Proposizione 1. *Sia X uno spazio topologico irriducibile e sia $U \subseteq X$ aperto non vuoto. Allora U è irriducibile.*

Dimostrazione. Per assurdo $\exists C_1, C_2$ chiusi propri tali che $U = C_1 \cup C_2$. Dunque presi $\overline{C_1}, \overline{C_2} \subseteq X$, si ha che $\overline{C_1} \cup \overline{C_2} = \overline{C_1 \cup C_2} = \overline{U} = X$ in quanto gli aperti sono densi. D'altra parte si ha anche che $C_i = \overline{C_i} \cap U$ e quindi i chiusi $\overline{C_i}$ sono propri in X. □

Proposizione 2. *Sia $\{U_i;\ i \in I\}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X, tale che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\forall i, j \in I$. Se U_i, $\forall i \in I$ allora X è irriducibile.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Proposizione 3. *Sia X un spazio topologico e sia $Z \subseteq X$ un sottospazio irriducibile. Allora $\overline{Z} \subseteq X$ è irriducibile.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\overline{Z}$ sia riducibile, allora esistono due chiusi $C_1, C_2 \subset \overline{Z}$ tale che $\overline{Z} = C_1 \cup C_2$. Ma allora possiamo scrivere Z come:

$$Z = (Z \cap C_1) \cup (Z \cap C_2)$$

e quindi, per l'irriducibilità di Z, si ha che $Z = Z \cap C_1 \vee Z = Z \cap C_2$. Supponiamo $Z = Z \cap C_1 \Rightarrow Z \subseteq C_1$ e, passando alle chiusiure, $\overline{Z} \subseteq C_1$. Abbiamo raggiunto l'assurdo in quanto $C_1 \subset \overline{Z}$. □

Definizione 0.4 (Sottovarietà affine)**.** In $(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}, Zar)$ sia $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un chiuso. Se Y con la topologia indotta è irriducibile, diremo che Y è una sottovarietà affine.

Proposizione 4. *Sia $\mathbb{K}$ un campo infinito. Un sottoinsieme $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ è irriducibile $\Leftrightarrow$ $I(Y)$ è un ideale primo.*

Dimostrazione. Supponiamo che Y sia irriducibile e siano f, g polinomi tali che $fg \in I(Y)$. Allora abbiamo

$$Y \subseteq \overline{Y} = V(I(Y)) \subseteq V(fg) = V(f) \cup V(g).$$

Quindi possiamo scrivere

$$Y = (V(f) \cap Y) \;\cup\; (V(g) \cap Y).$$

Essendo Y irriducibile, uno dei due chiusi appena considerati non è proprio, cioè

$$V(f) \cap Y = Y, \text{ oppure } V(g) \cap Y = Y,$$

da cui $Y \subseteq V(f)$ oppure $Y \subseteq V(g)$, quindi $f \in I(Y)$ oppure $g \in I(Y)$. Questo dimostra che $I(Y)$ è primo.

Viceversa, supponiamo che $I(Y)$ sia primo. Supponiamo per assurdo che Y sia riducibile.:

$$Y = Y_1 \cup Y_2,$$

con Y_1 e Y_2 chiusi propri. Allora si ha

$$I(Y_1) \subset\neq I(Y), \qquad I(Y_2) \subset\neq I(Y).$$

Scegliamo due elementi

$$f \in I(Y_1) \setminus I(Y), \quad g \in I(Y_2) \setminus I(Y).$$

Per costruzione il prodotto fg si annulla su tutto Y, quindi $fg \in I(Y)$, ma questo è assurdo perché $I(Y)$ è primo.

□

Corollario 2. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Allora la mappa V che associa ad un ideale i suoi zeri e la mappa I che associa ad un chiuso l'ideale corrispondente sono biezioni tra:*

$$\begin{aligned}\{\textit{ideali radicali}\} &\longleftrightarrow \{\textit{chiusi di Zariski}\}\\ \{\textit{ideali primi}\} &\longleftrightarrow \{\textit{chiusi irriducibili}\}\\ \{\textit{ideali massimali}\} &\longleftrightarrow \{\textit{punti}\}\end{aligned}$$

Dimostrazione. La prima corrispondenza biunivoca è conseguenza del NSS, la seconda segue da (4) e la terza è diretta conseguenza del NSS, primo passo della dimostrazione. □

Esempio 0.5. Alcuni esempi:

1. Se $\mathbb{K}$ è infinito, allora $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ è irriducibile: infatti, in questo caso $I(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = (0)$ che è un ideale primo in $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

2. Curve algebriche piane: sia $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$ con $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso; per il NSS si ha $I(V(f)) = \sqrt{(f)}$. Ricordiamo ora che $\mathbb{K}[x_1, x_2]$ è un UFD, quindi

$$f = f_1^{n_1} \ldots f_k^{n_k}$$

con f_i irriducibili, e si può facilmente verificare che

$$\sqrt{(f)} = (f_1 \ldots f_k).$$

Infine, un ideale principaleè primo se e solo se il generatore è primo, e quindi irriducibile. In conclusione, se per una curva algebrica affine C scegliamo un'equazione ridotta, cioè $C = V(f)$ con $(f)\sqrt{(f)}$, abbiamo che C è irriducibile se e solo se f è un polinomio irriducibile.

3. Sia $X = V(x_1x_3, x_2x_3) \subseteq \mathbb{A}^3$. Osserviamo che X è riducibile: infatti, $X = V(x_3) \cup V(x_1, x_2)$. In effetti l'ideale associato ad X non è primo:

$$(x_1x_3, x_2x_3) = (x_1, x_2)(x_3).$$

Osserviamo infine che l'ideale (x_1x_3, x_2x_3) è radicale.

1 Componenti irriducibili

Definizione 0.6 (Spazio noetheriano)**.** Uno spazio topologico X si dice noetheriano se ogni catena discendente di chiusi è stazionaria.

Proposizione 5. *Siano X, Y spazi topologici, con X noetheriano e sia $f\colon X \to Y$ una funzione continua. Allora $f(X)$ è noetheriano.*

Dimostrazione. Sia $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \ldots$ una catena discendente di sottospazi chiusi in $f(X)$. Da questa ricaviamo una catena discendente di chiusi in X:

$$f^{-1}(C_1) \supseteq f^{-1}(C_2) \supseteq f^{-1}(C_3) \supseteq \ldots$$

Poiché X è noetheriano, tale catena è stazionaria, i.e. esiste un indice i tale che $f^{-1}(C_j) = f^{-1}(C_i),\ \forall j \geq i$. Ma allora segue che $C_j = C_i,\ \forall j \geq i$ in $f(X)$. Questo conclude la dimostrazione. □

Proposizione 6. *Lo spazio affine $\mathbb{A}^n$ con la topologia di Zariskiè uno spazio topologico noetheriano. Inoltre ogni suo sottospazio lo è.*

Dimostrazione. Sia $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \ldots$ una catena discendente di sottospazi chiusi. Allora $I(C_1) \subseteq I(C_2) \subseteq I(C_3) \subseteq \ldots$ è una catena ascendente di ideali in $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ che è un anello noetheriano e quindi tale catena è stazionaria. Allora $\exists n \in \mathbb{N};\ I(C_k) = I(C_{k+1})$ per ogni $k \geq n$. Quindi $C_k = V(I(C_k)) = V(I(C_{k+1})) = C_{k+1}$ per ogni $k \geq n$. Questo dimostra la prima affermazione. Per la seconda si procede in modo analogo. □

Teorema 0.7. *Sia X uno spazio topologico noetheriano. Allora X si può scrivere in modo unico, a meno dell'ordine, come unione finita di chiusi irriducibili:*

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_n \quad \textit{con } X_i \not\subseteq X_j, \ \forall j \neq i. \tag{1}$$

I chiusi X_i che compaiono in (1) *sono dette componenti irriducibili di X.*

Dimostrazione. (Esistenza) Se X è già irriducibile non c'è nulla da provare. Se invece X è riducibile supponiamo per assurdo che X non abbia una decomposizione finita in chiusi irriducibili. Quindi $X = X_1 \cup Y_1$ chiusi propri e almeno uno dei due è riducibile. Ad esempio $Y_1 = X_2 \cup Y_2$ chiusi propri di Y_1 (e quindi anche chiusi di X) e almeno uno tra X_2 e Y_2 è riducibile. Procedendo con questo ragionamento costruiamo una catena discendente di chiusi propri:

$$X \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots,$$

che non è stazionaria, perché altrimenti X sarebbe unione finita di chiusi irriducibili. Ciò è assurdo in quanto X è noetheriano.
(Unicità) Supponiamo esistano due decomposizioni in chiusi e irriducibili per X, i.e. $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n = Y_1 \cup \ldots \cup Y_k$ con $X_i \neq X_j, Y_i \neq Y_j \ \forall j \neq i$. Possiamo scrivere

$$X_i = X_i \cap X = X_i \cap (\bigcup Y_j) = (X_i \cap Y_1) \cup \ldots \cup (X_i \cap Y_k).$$

Osserviamo che per ogni $j = 1 \ldots k$, l'intersezione $X_i \cap Y_j$ è un chiuso di X e dunque, poichè X_i è irriducibile, esiste un'indice $n(i)$ tale che

$$X_i = X_i \cap Y_{n(i)}.$$

Segue che $X_i \subseteq Y_{n(i)}$. D'altra parte, ripetendo un ragionamento analogo su $Y_{n(i)}$, si che esiste un indice $j(i)$ tale che

$$X_i \subseteq Y_{n(i)} \subseteq X_{j(i)}.$$

Per la richiesta di avere $X_i \neq X_j$ per ogni $i \neq j$, si deve avere $i = j(i)$) e $X_i = Y_{n(i)}$. Abbiamo dimostrato che $n \leq k$ e che ogni chiuso X_i compare nella decomposizione $Y_1 \cup \ldots \cup Y_k$.

Lo stesso argomento applicato a un chiuso Y_j permette di concludere che ogni chiuso Y_j compare nella decomposizione $X_1 \cup \ldots \cup X_n$ e quindi la decomposizione è unica. □