ISITUZIONI DI GEOMETRIA SUPERIORE 3 - 2017/18
PROGRAMMA FINALE
VALENTINA BEORCHIA

Insiemi algebrici affini, Teorema della base di Hilbert, topologia di Zariski sullo spazio affine. La topologia di Zariski non e' di Hausdorff. La topologia prodotto su $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ e' strettamente meno fine della topologia di Zariski su $\mathbb{A}^{n+m}$. Gli aperti principali sono una base per la topologia di Zariski. Ideale di un sottoinsieme, tale ideale è radicale. Ideale di un punto. Teorema degli zeri di Hilbert, forma debole e forma forte. Conseguenza del Teorema degli zeri di Hilbert: $\mathbb{A}^n$ è quasi compatto.

Spazi topologici irriducibili e riducibili. In uno spazio irriducibile ogni aperto non vuoto è denso e ogni coppia di aperti non vuoti ha intersezione non vuota. In uno spazio irriducibile ogni aperto non vuoto è irriducibile. Un sottoinsieme di uno spazio affine è irriducibile con la topologia di Zariski se e solo se il so ideale è primo. Su un campo infinito, $\mathbb{A}^n$ è irriducibile. Componenti irriducibili in uno spazio noetheriano. Anello delle coordinate di una varietà affine e funzioni polinomiali. Esempi. Teorema degli zeri di Hilbert relativo. Morfismi tra variet affini.

Spazi proiettivi come quozienti dello spazio affine meno l'origine. La topologia di Zariski sugli spazi proiettivi è la topologia quoziente. Prodotti di spazi proiettivi come quozienti. La topologia di Zariski su un prodotto di spazi proiettivi è la topologia prodotto. Fasci di coniche, superfici di Hirzebruch. Ideale omogeneo di un sottoinsieme dello spazio proiettivo. Cono affine su un chiuso proiettivo, confronto dei relativi ideali. Caratterizzazione dell'insieme vuoto come chiuso di Zariski proiettivo su un campo algebricamente chiuso. Teorema degli zeri di Hilbert proiettivo.

Gli spazi proiettivi sono noetheriani. Un chiuso proiettivo è irriducibile se e solo se il suo ideale è primo. Gli spazi proiettivi su un campo infinito sono irriducibili. Varietà proiettive e quasi proiettive. Immersioni omeomorfe sull'immagine degli spazi affine negli spazi proiettivi. Omogeneizzazione e deomogeneizzazione di polinomi ed ideali. Chiusura proiettiva.

Campo delle funzioni razionali. Proiezione stereografica. Anello locale in un punto e suo ideale massimale. Biiezione tra l'insieme dei morfismi tra una varietà quasi proiettiva e una varietà affine e l'insieme degli omomorfismi di k-algebre tra le algebre delle funzioni regolari. Corollario: su un campo algebricamente chiuso due varietà affini sono isomorfe se e solo se gli anelli delle coordinate locali sono isomorfi. Un'applicazione tra una variet quasi proiettiva X e una varietà affine è un morfismo se e solo se le sue componenti sono funzioni regolari su X. Il complementare di un'ipersuperficie in una varietà affine è isomorfo a una varietà affine. Caratterizzazione dei morfismi tra varietà quasi proiettive, come mappe localmente determinate da componenti che sono funzioni regolari, o mappe localmente determinate da componenti polinomiali omogenee dello stesso grado. Scoppiamento dell'origine nel piano affine. Scoppiamento di uno spazio proiettivo lungo una sottovarietà.

Morfismi di Veronese, curve razionali normali e superficie di Veronese. Superficie di Veronese. Proiezioni di quadriche. Proiezioni della cubica gobba. Esempi di superfici con punti doppi isolati. Superficie romana di Steiner.

Le proiettività sono isomorfismi. Definizione di proiezione di centro un sottospazio proiettivo e sua interpretazione geometrica. Ogni applicazione lineare corrisponde a una proiezione.

Il prodotto di varietà affini una variet affine. Proprietà universale del prodotto di varietà affini. Prodotto di variet proiettive. Immersione di Segre e varietà di Segre. Sottovarietà proiettive delle varietà di Segre. L?immagine tramite la mappa di Segre di un prodotto di varietà quasiproiettive è una varietà quasiproiettiva. Proprietà universale del prodotto di varietà quasiproiettive.

Ogni varietà quasi proiettiva è separata. Il grafico di un morfismo tra varietquasiproiettive è chiuso. Teorema di completezza.

Le ipersuperfici riducibili formano un chiuso proprio nello spazio delle ipersuperfici proiettive di grado fissato. Intersezioni tra le varie componenti irriducibili di tale chiuso.

Applicazioni razionali tra varietà quasiproiettive. Dominio e immagine di una mappa razionale. Mappe razionali dominanti, pullback di mappe razionali. Mappe birazionali. Biiezione tra $Rat(X;Y)$, insieme delle mappe razionali dominanti, e $Hom(K(Y);K(X))$. Caratterizzazione delle mappe birazionali.

Dimensione combinatoria di uno spazio topologico. Dimensione di $\mathbb{A}^1$, stima della dimensione di $\mathbb{A}^n$. Dimensione combinatoria di uno spazio topologico in un punto. Dimensione di un sottospazio, dimensione di un chiuso proprio in uno spazio irriducibile. Dimensione dell'immagine di una applicazione continua suriettiva e chiusa tra spazi noetheriani.

Algebre finitamente generate. Algebre finite. Elementi interi. Una A-algebra finita che sia dominio d?integrità à intera su A. Se b è un elemento intero su A, allora $A[b]$ è una algebra finita su A. Se b è un elemento intero su A, allora $A[b]$ è una algebra intera su A. Un?algebra finitamente generata su A e dominio d?integrità è una A-algebra finita se e solo se è intera su A.

Morfismi finiti tra varietà affini. Esempi di morfismi finiti e non. La composizione di morfismi finiti è un morfismo finito, le inclusioni sono finite. I morfismi finiti dominanti sono suriettivi e preserveno le inclusioni strette tra chiusi irriducibili. I morfismi finiti suriettivi preservano la dimensione Lemma di normalizzazione di Noether, versione geometrica.

Dimensione degli spazi affini e delle ipersuperfici. Caratterizzazione delle varieta' affini di codimensione 1. Risultati analoghi nello spazio proiettivo. Dimensione di un'intersezione tra una varietà affine e un'ipersuperficie affine. Risultati analoghi nello spazio proiettivo.

Teoremi sulla dimensione delle fibre di un morfismo proiettivo. Dimensione di prodotti e coni affini. Teorema di irriducibilità di un chiuso che surietta sua varietà proiettiva con fibre irriducibili ed equidimensionali. Teorema sulla dimensione di un'intersezione tra varietà affini e varietà proiettive. I prodotti di spazi proiettivi non sono isomorfi a spazi proiettivi.

Definizione e struttura di varietà topologica sulla Grassmanniana, sua dimensione. Immersione di Plücker. Famiglia universale. Join di due varietà proiettive.

Punti singolari e punti regolari di una ipersuperficie affine, l?insieme dei punti regolari è un aperto non vuoto. Spazio tangente affine. Punti singolari e punti regolari di una varietà affine. Differenziale di un morfismo tra varietà affini e matrice Jacobiana. Spazio tangente di Zariski T_pX in un punto di una varietà quasiproiettiva X. Se X è una varietà affine lo spazio tangente affine e lo spazio tangente di Zariski sono isomorfi. Se X è una varietà affine o proiettiva, allora il sottoinsieme dei punti regolari è un aperto non vuoto e in ogni punto

$\dim T_p X \geq \dim X$. Criterio Jacobiano per la ricerca di punti singolari per varietà affini e proiettive.

Mappa di Gauss per una varietà proiettiva. Varietà proiettiva delle tangenti. Varietà delle secanti. Varietà duale. Teorema di Bertini. La generica ipersuperficie di grado fissato è liscia.

Testi seguiti

(1) I. R. Shafarevich: Basic Algebraic Geometry 1: Varieties in Projective Space, Third edition. Springer, Heidelberg, 2013, xviii + 310 pp.
(2) J. Harris: Algebraic geometry. A first course, Graduate Texts in Mathematics, 133, Springer-Verlag, New York, 1995. xx + 328 pp.
(3) R. Hartshorne: Algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. xvi+496 pp.