

PRIMA PROVA DI ANALISI NUMERICA APPELLO DEL 10/07/2018

NOME E COGNOME:

Rispondere nello spazio delimitato sottostante la domanda.

1a) Sia $A = V\Sigma U^T$ la SVD di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Che dimensioni hanno le matrici V e U e che tipo di matrici sono? Che dimensioni ha la matrice Σ e come è fatta?

1b) Dire cosa sono i valori singolari, i vettori singolari destri e i vettori singolari sinistri della matrice A .

1c) Quale relazione intercorre tra i valori singolari, i vettori singolari destri e i vettori singolari sinistri della matrice A ?

1d) Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare tale che $A^T = (A^{-1})^3$. Descrivere i valori singolari di A in termini di autovalori di A . Giustificare la risposta.

2a) Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dire come è definito l'indice di condizionamento $K(A, x)$ di A relativo al dato $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$, con $Ax \neq \underline{0}$, nelle norme $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ su \mathbb{R}^n e $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ su \mathbb{R}^m .

2b) Spiegare perché si ha $K(A, x) \geq 1$.

2c) Sia x perturbato in \tilde{x} e quindi $y = Ax$ in $\tilde{y} = A\tilde{x}$. Mostrare che $\delta \leq K(A, x)\varepsilon$, dove $\varepsilon = \frac{\|\tilde{x} - x\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}}$ e $\delta = \frac{\|\tilde{y} - y\|_{\mathbb{R}^m}}{\|y\|_{\mathbb{R}^m}}$.

2d) Come deve essere perturbato x in modo da avere $\delta = K(A, x)\varepsilon$.

3a) Scrivere l'iterazione del metodo di Newton per trovare lo zero x^* di una funzione f localizzato in un intervallo $[a, b]$.

3b) Descrivere la successione $\{x_n\}$ del metodo di Newton nel caso in cui $x_0 = x^*$.

3c) Descrivere la successione $\{x_n\}$ del metodo di Newton nel caso in cui $f(x) = ax + b$, $x \in [a, b]$, con $a \neq 0$.

3d) Nel calcolo di \sqrt{x} , $x > 1$, scrivere l'iterazione del metodo di Erone e l'ideale punto di partenza x_0 per tale iterazione.
