PRIMA PROVA DI ANALISI NUMERICA APPELLO DEL 12/06/2018

NOME E COGNOME:

Rispondere nello spazio delimitato sottostante la domanda.

1a) Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dare la formula che fornisce la norma ∞ di A.

1b) Per quale $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ risulta $\|A\|_\infty = \frac{\|Ax^*\|_\infty}{\|x^*\|_\infty}$?

1c) Dare la formula che fornisce la norma 1 di A.

1d). Per quale $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ risulta $\|A\|_1 = \frac{\|Ax^*\|_1}{\|x^*\|_1}$?

2a) Si consideri un problema matematico caratterizzato da una funzione dato-risultato $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dove D è un aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia $x \in D$ un dato che viene perturbato in $\widetilde{x} \in D$. Si ha

$$\delta \doteq \sum_{i=1}^{n} K_i\left(f, x\right) \cdot \varepsilon_i.$$

Come sono definiti gli errori δ e ε_i, $i \in \{1, \dots, n\}$?

1b) Come sono definiti gli indici di condizionamento $K_i\left(f, x\right)$, $i \in \{1, \dots, n\}$?

2c) Qual è il significato di $\doteq$, uguale con il puntino sopra?

2d) Fornire un esempio di funzione dato-risultato f in cui $\doteq$ può essere sostituito da $=$.

3a) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dove $[a, b]$ è un intervallo di localizzazione di uno zero x^* di f. Quanti passi del metodo di bisezione sono sufficienti per ottenere un'approssimazione di x^* che disti da x^* non più di TOL?

3b) Nell'applicazione del metodo di Newton per la determinazione di un'approssimazione di x^* si assume che l'intervallo $[a, b]$ possieda un'ulteriore proprietà, oltre a quelle nella definizione di intervallo di localizzazione. Dire qual è questa proprietà e scrivere il metodo di Newton.

3c) Se l'iterazione di Newton viene interrotta quando l'iterata x_n soddisfa $|f(x_n)| \leq \mathrm{TOL}$, cosa si può dire dell'errore $|x_n - x^*|$?

3d) Assumiamo che l'iterata iniziale del metodo di Newton stia in un intorno circolare $I_\varepsilon = [x^* + \varepsilon, x^* - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, di x^* tale che $d_\varepsilon \varepsilon < 1$, dove $d_\varepsilon := \frac{1}{2} \cdot \frac{\max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)|}{\min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)|}$. Se l'iterata x_n ha t_n cifre esatte come approssimazione di x^*, cioè si ha $|x_n - x^*| = 10^{-t_n}$, cosa si può dire del numero di cifre esatte t_{n+1} di x_{n+1}?