

PRIMA PROVA DI ANALISI NUMERICA APPELLO DEL 26/06/2018

NOME E COGNOME:

Rispondere nello spazio delimitato sottostante la domanda.

1a) Sia V uno spazio vettoriale e sia $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ una norma su V . Dire come sono definite le palle unitarie $B(\underline{0}, 1)$ e $\overline{B}(\underline{0}, 1)$ nello spazio normato $(V, \| \cdot \|)$.

1b) In \mathbb{R}^n , quale relazione sussiste tra le palle unitarie nelle norme p e q , $p, q \in [1, +\infty]$, con $p < q$?

1c) Tracciare in un unico disegno i bordi delle palle unitarie in \mathbb{R}^2 relative alle norme 1, 2 e ∞ .

1d) Nel precedente disegno, dove si trova il bordo della palla unitaria in \mathbb{R}^2 relativa alla norma $p = \sqrt{2}$?

2a) Si consideri l'approssimazione dei numeri reali con un insieme di numeri di macchina definito dai parametri B, m, M, t . Sia $x = \pm(b_0.b_{-1}b_{-2}b_{-3}\dots)_B B^p$ la rappresentazione normalizzata di un numero reale $x \neq 0$ in base B . Dire quando si ha overflow e quando si ha underflow.

2b) Si supponga che nell'approssimare x con un numero di macchina non vi sia né overflow né underflow. Dire come è definita l'approssimazione $\text{fl}(x)$ di x se si usa l'arrotondamento.

2c) Come è definita la precisione di macchina eps per il dato insieme di numeri di macchina?

2d) Mostrare che nel caso dell'arrotondamento si ha $|\varepsilon_r| \leq \frac{\text{eps}}{2}$ per l'errore relativo $\varepsilon_r = \frac{\text{fl}(x) - x}{x}$.

3a) Si consideri il problema di interpolazione di Lagrange p relativo ai punti (x_i, y_i) , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Scrivere la matrice di Vandermonde.

3b) Scrivere la forma di Lagrange del polinomio p di interpolazione relativo ai punti (x_i, y_i) , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

3c) Quale relazione intercorre tra il polinomio p di interpolazione di Lagrange relativo ai punti (x_i, y_i) , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, e il polinomio q di interpolazione di Lagrange relativo ai punti $(x_i, \alpha y_i)$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$? Giustificare la risposta.

3d) Scrivere i tre coefficienti di Lagrange nel caso $n = 2$.
