Corso di Laurea in Matematica, Corso di Laurea in Fisica
Esame di Analisi 3, modulo B
A.a. 2017-2018, sessione estiva, II appello

COGNOME ______________________ NOME ______________________

N. Matricola ______________________ Anno di corso ______________________

Corso di Studi: Matematica ○ Fisica ○

ESERCIZIO N. 1. Si calcoli il volume del solido

$$E = \Big\{(x, y, z) : z^2 \le x^2 + 4y^2 \le 1 + z^2 \le 2\Big\}.$$

RISULTATO

π

SVOLGIMENTO

Posto, per $|z| \le 1$,

$$S_z = \{(x,y) : z^2 \le x^2 + 4y^2 \le 1 + z^2\},$$

si ha

$$\iiint_E 1\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} \left(\iint_{S_z} 1\,dx\,dy \right) dz$$

$$= 2 \int_0^1 \left(\pi \sqrt{1+z^2}\, \tfrac{1}{2} \sqrt{1+z^2} - \pi z \tfrac{1}{2} z \right) dz$$

$$= \pi \int_0^1 (1 + z^2 - z^2)\, dz = \pi$$

ESERCIZIO N. 2. Si stabilisca per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito

$$\iint_E y(x^2+y^2)^\alpha dxdy$$

con $E = \Big\{(x,y) : 0 < 2x < x^2+y^2 < 4, y > 0\Big\}$.

RISULTATO

$\alpha > -2$

SVOLGIMENTO

Posto $\Phi(\rho,\vartheta) = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$

e $K = \{(\rho,\vartheta) : 2\cos\vartheta < \rho < 2,\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}\}$,

si ha $\Phi(K) = E$.

Poniamo, per ogni n,

$K_n = \{(\rho,\vartheta) : 2\cos\vartheta < \rho < 2,\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\}$.

e $E_n = \Phi(K_n)$.

Si ha

$$\iint_{E_n} y(x^2+y^2)^\alpha dxdy = \iint_{K_n} \rho^{2\alpha+2}\sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} \left(\int_{2\cos\vartheta}^{2} \rho^{2\alpha+2} d\rho\right)\sin\vartheta\, d\vartheta = \begin{cases} \dfrac{2^{2\alpha+3}}{2\alpha+3}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} (1-(\cos\vartheta)^{2\alpha+3})\sin\vartheta\, d\vartheta & \text{se } \alpha \neq -\frac{3}{2} \\ -\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} \log(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta & \text{se } \alpha = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Si conclude

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} (\cos\vartheta)^{2\alpha+3}\sin\vartheta\, d\vartheta = \int_0^1 t^{2\alpha+3} dt \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} 2\alpha+3 > -1 \\ \alpha \neq -\frac{3}{2} \end{cases}$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} \log(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = \int_0^1 -\log t \in \mathbb{R}$ se $\alpha = -\frac{3}{2}$