

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA - A.A. 2017/18

CORSI DI LAUREA IN INGEGNERIA NAVALE ED INDUSTRIALE

Trieste, 3/9/2018

Prof. Dario Portelli

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate

1.- In \mathbb{R}^4 sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Inoltre, sia V il sottospazio delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y - t = 0. \end{cases}$$

- (i) Si determini la dimensione ed una base di $U + V$.
- (ii) Si determini la dimensione ed una base di $U \cap V$.
- (iii) Si completi la base di $U \cap V$, trovata al punto (ii), ad una base di U .

2.- Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} e sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ una base ordinata di V . Si spieghi perchè le seguenti condizioni

$$f(v_1) = -v_1 + 2v_3 \quad f(v_2) = v_1 + v_2 \quad f(v_3) = v_1 \quad f(v_4) = 3v_4$$

definiscono una ed una sola applicazione lineare $f : V \rightarrow V$.

- (i) Si scriva la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base \mathcal{B} .
- (ii) Si determinino tutti gli autovalori di f e per ciascuno di essi si determini la relativa molteplicità algebrica, e quella geometrica.
- (iii) Si dica se f è diagonalizzabile.

3.- Si dica se le due matrici ad entrate nel campo \mathbb{C} dei numeri complessi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sono simili tra di loro, o meno.

4.- Nello spazio affine \mathbb{A}^3 , dotato di un sistema di coordinate affini O, x, y, z , siano α, β e γ i tre piani di equazioni, rispettivamente

$$2x = 0 \quad y = 0 \quad x + y = 2$$

Qual'è la loro posizione reciproca?

È vero che, presi comunque tre numeri reali a, b, c tali che $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, allora l'equazione

$$a2x + by + c(x + y - 2) = 0 \tag{1}$$

è l'equazione cartesiana di un piano in \mathbb{A}^3 ?

È possibile trovare degli scalari a, b, c come sopra in modo che la (1) sia l'equazione cartesiana di un piano passante per la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x & = & -4 \\ x - y & = & 3 \end{cases} \quad ?$$