CORREZIONE del COMPITO SCRITTO di GEOMETRIA del 3/9/18

ESERCIZIO 1

I due vettori che generano U sono linearmente indip. tra loro, dunque $\dim(U)=2$.

La matrice del sistema lineare omogeneo le cui soluzioni formano V è

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

il suo rango è 2 perché le due righe sono evidentemente linearmente indip.

Quindi $\dim(V) = 4-2=2$ = # delle incognite

Troviamo $U\cap V$: un vettore di U

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a-b \\ 2b \end{bmatrix}$$

deve appartenere a V, cioè deve soddisfare le equazioni che definiscono V:

$$\begin{cases} a-b+2b=0 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-a} \\ 2b-2b=0 \end{cases}$$

Quindi i vettori di $U\cap V$ sono tutti e soli quelli del tipo

$$\begin{bmatrix} a \\ -a \\ 2a \\ -2a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Pertanto $w^t=[1\ -1\ 2\ -2]$ è una base di $U\cap V$ e $\dim(U\cap V)=1$ ((ii) è risolto)

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in U$ e non è proporzionale a $w=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Poiché $\dim(U)=2$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $w=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ formano, quindi, una base di U

(e (iii) è risolto)

La formula di Grassmann ci dice che

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U\cap V) = 2+2-1 = \underline{\underline{3}}$$

Cerchiamo una base di V:
riscriviamo il S.L. omogeneo che definisce V così:

$$\begin{cases} x = y - 2z \\ t = 2y \end{cases}$$

cioè prendendo come parametri liberi le indeterminate y, z. Allora

y	z	x	t
1	0	1	2
0	1	-2	0

quindi una base di V è data da $v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix} = v_2$

Si vede subito che $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ non è soluzione del SL omog. che definisce V, cioè tale vettore $\notin V$. In particolare è linearmente indip. da $\begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}$. Ma $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \in U \subset U+V$

Dunque, una base di $U+V$ è $\begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$

ESERCIZIO 2

v_1, v_2, v_3, v_4 è, per ipotesi, una base di V. Quindi le condizioni date definiscono una ed una sola appl. lineare $f: V \longrightarrow V$ per il Teorema di determinazione di un'appl. lineare.

$$A \overset{\text{def}}{=} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4) \end{array} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \\ \end{array}$$

(e (i) è risolto)

$$p_A(t) = \det \begin{bmatrix} -1-t & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-t \end{bmatrix} = (3-t) \det \begin{bmatrix} -1-t & 1 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 2 & 0 & -t \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} -1-t & 1 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 2 & 0 & -t \end{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} -1-t & 1 \\ 0 & 1-t \\ 2 & 0 \end{matrix}}_{\text{Sarrus}} = -(t+1)(t-1)t - 2(1-t) =$$

$$= (1-t)(t^2+t-2)$$

$$p_A(t) = (t-3)(t-1)(t^2+t-2) \qquad t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow -2 \end{array}$$

$$p_A(t) = (t-3)(t+2)(t-1)^2$$

La molteplicità algebrica degli autovalori 3 e -2 è 1, quindi anche la loro molteplicità geometrica è $=1$.

Calcoliamo la molt. geometrica dell'autovalore $t=1$

$$A - I_4 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ il cui rango è, chiaramente, $=3$

Pertanto

$$m_g(1) = \dim(W_1) = 4 - 3 = 1 < 2 = m_{alg}(1)$$

Questo risolve completamente (ii).

Poiché esiste un autovalore di f $(t=1)$ per il quale le due molteplicità algebrica e geometrica sono diverse tra loro, f non è diagonalizzabile.

Ed anche (iii) è completamente risolto.

ESERCIZIO 3

Si tratta di vedere se esiste una matrice P, 3×3, invertibile tale che $A = P^{-1}BP$.

Cerchiamo gli autovalori di A

$$A - tI_3 = \begin{bmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 1 & 0 & -t \end{bmatrix} \qquad \det(A - tI_3) = \left[\begin{array}{ccc|cc} -t & 1 & 0 & -t & 1 \\ 0 & -t & 1 & 0 & -t \\ 1 & 0 & -t & 1 & 0 \end{array}\right] =$$

$$= -t^3 + 1 = -(t^3 - 1)$$

$t^3 - 1 = (t-1)(t^2 + t + 1)$ con Ruffini, per esempio

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \qquad \omega := \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \omega^2$$

$$p_A(t) = -(t-1)(t-\omega)(t-\omega^2)$$

Qui è essenziale considerare la matrice A ad entrate <u>in $\mathbb{C}$</u>.

Dunque esiste una matrice S, 3×3, invertibile, ad entrate in $\mathbb{C}$, tale che

$$\underline{D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix} = S^{-1}AS}$$

Facciamo l'analogo lavoro per B:

$$B - tI_3 = \begin{bmatrix} -t & 0 & 1 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & -t \end{bmatrix} \qquad \det(B - tI_3) = \left[\begin{array}{ccc|cc} -t & 0 & 1 & -t & 0 \\ 1 & -t & 0 & 1 & -t \\ 0 & 1 & -t & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= -t^3 + 1 = -(t-1)(t-\omega)(t-\omega^2)$$

Quindi esiste una matrice T, 3×3, invertibile, ad entrate in $\mathbb{C}$ tale che $D = T^{-1}BT = S^{-1}AS \Rightarrow$

$$A = (ST^{-1})B(TS^{-1}) = (TS^{-1})^{-1}B(TS^{-1})$$

TS^{-1} è una matrice 3x3, invertibile, ad entrate in $\mathbb{C}$. Dunque, le matrici 3x3, ad entrate in $\mathbb{C}$ <u>A e B sono simili.</u>

<u>ESERCIZIO 4</u>

$\alpha \cap \beta \cap \gamma = ?$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x+y = 2 \end{cases} \Longrightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset$$

Ma per quanto riguarda l'intersezione delle giaciture si ha

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x+y = 0 \end{cases}$$

e lo spazio di tutte le soluzioni è il sottospazio di dimensione 1 di $\mathbb{R}^3$, generato dal vettore $\underline{\underline{v \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$

$$(1) \Longleftrightarrow (2a+c)x + (b+c)y - 2c = 0$$

Questa <u>non</u> rappresenta un piano in $\mathbb{A}^3$ se e solo se

$$(*) \begin{cases} 2a + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ovvero, tale vettore è una base per lo spazio vettoriale di tutte le soluzioni del S.L. omogeneo (*).

Per tutte le altre scelte di $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ con $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ ["altre" significa <u>NON</u> <u>proporzionali</u> a $(1,2,-2)$], la (1) è l'equazione cartesiana di un piano in $\mathbb{A}^3$.

La direzione della retta r è generata dal vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_3$.

Per quanto osservato sopra, tale vettore appartiene alla giacitura di un qualsiasi piano di equazione (1).

Un punto di r è, ad esempio $P(-4,7,0)$.

Quindi per completare la risoluzione del problema è sufficiente imporre il passaggio per $P(-4,-7,0)$ nell'equazione (1):

$$2a(-4)+b(-7)+(-4-7-2)c=0$$

$$-8a-7b-13c=0 \Longrightarrow \boxed{c=-\frac{8}{13}a-\frac{7}{13}b}$$

$$2ax+by-\left(\frac{8}{13}a+\frac{7}{13}b\right)(x+y-2)=0$$

$$26ax+13by-8ax-8ay+16a-7bx-7by+14b=0$$

$$a(26x-8x-8y+16)+b(13y-7x-7y+14)=0$$

$$\boxed{a(18x-8y+16)+b(-7x+6y+14)=0}$$ è un fascio di piani

Ciascuno di tali piani passa per P e la sua giacitura contiene il vettore e_3. Dunque ogni piano del fascio contiene la retta r. Verifichiamo che

$$\begin{cases} 9x-4y=-8 \\ 7x-6y=14 \end{cases}$$

sono ancora equazioni cartesiane per r. Consider il sistema lineare

$$\begin{cases} x=-4 \\ x-y=3 \\ 9x-4y=-8 \\ 7x-6y=14 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 9 & -4 & -8 \\ 7 & -6 & 14 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & -4 & 28 \\ 0 & -6 & 42 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$