Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2018/2019 - 28 gennaio 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

(1) Si dia la definizione di applicazione lineare tra spazi vettoriali. Si enunci e si dimostri il Teorema di dimensione.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 - x_2 + 5x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scriva la matrice $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\\-1\end{pmatrix}$, quindi

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)=\begin{pmatrix}6 & -1 & 5\\ 4 & 2 & 6\\ 2 & -3 & -1\end{pmatrix}=A$$

(b) Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e un sua base e la dimensione di $\mathrm{Im} f$ e una sua base.

oss. che $A^{(1)}+A^{(2)}=A^{(3)}$ e che $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$ sono lin. indipendenti (opp. ridurre a scala). $\Rightarrow$ $\mathrm{rg}\, A = 2 = \dim \mathrm{Im} f$, $\underbrace{\dim \ker f = 3 - \mathrm{rg} f}_{=1}$

Si ha $\mathrm{Im} f = \mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$ e una base è $\{A^{(1)}, A^{(2)}\}$

Base di $\ker f$: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

(c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia $g_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$g_a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \quad g_a\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\0\\4\end{pmatrix}.$$

Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g_a.$$

oss. che $\mathrm{rg}\, g_a = 2$ $\forall a$ e una base di $\mathrm{Im}\, g_a$ è $\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\0\\4\end{pmatrix}\right\}$

Essendo $\dim \mathrm{Im}\, g_a = \dim \mathrm{Im} f$, se per qualche a si ha $\mathrm{Im}\, g_a \subseteq \mathrm{Im} f$ $\Rightarrow$ vale $\mathrm{Im}\, g_a = \mathrm{Im} f$. Oss. che $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}A^{(1)}$ e che $\begin{pmatrix}a\\0\\4\end{pmatrix} \in \mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)})$ $\Leftrightarrow$ $a = 4$.

(d) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, si calcoli la dimensione di $\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g_a$ e la dimensione di $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g_a$.

Se $a = 4$, $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im}\, g_a$ $\Rightarrow$ $\dim \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im}\, g_a = 2$, $\dim(\mathrm{Im} f + \mathrm{Im}\, g_a) = 2$

Se $a \neq 4$, $\mathrm{Im} f \neq \mathrm{Im}\, g_a$; d'altra parte $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f$ $\forall a$

$\Rightarrow$ $\dim \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im}\, g_a = 1$; $\mathrm{Span}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im}\, g_a$

per Grassmann: $\dim(\mathrm{Im} f + \mathrm{Im}\, g_a) = 2 + 2 - 1 = 3$

(3) Sia $M \in M_{m,n}$ una matrice. Si dimostri che

$$M \cdot {}^tM \quad \text{e} \quad {}^tM \cdot M$$

sono matrici quadrate simmetriche.

$M \in M_{m,n}(K) \Rightarrow {}^tM \in M_{n,m}(K)$; quindi $M \cdot {}^tM \in M_m(K)$
${}^tM \cdot M \in M_n(K)$

Una matrice quadrata B è simmetrica $\Longleftrightarrow B = {}^tB$

Se $B = M \cdot {}^tM$, ${}^tB = {}^t({}^tM) \cdot {}^tM = M \cdot {}^tM = B$

Se $C = {}^tM \cdot M$, ${}^tC = {}^tM \cdot {}^t({}^tM) = {}^tM \cdot M = C$

(4) Si consideri la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

- Si determinino i polinomi caratteristici di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ed $L_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dove

$$B = M \cdot {}^tM, \qquad C = {}^tM \cdot M$$

ed i loro spettri.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $p_B(t) = t(4-t)(t-10)$, $Sp(B) = \{0, 4, 10\}$

$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$, $p_C(t) = (4-t)\cdot(10-t)$, $Sp(C) = \{4, 10\}$

- Si trovi una base ortonormale di autovettori per L_C.

Oss. che $C = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_C)$ è diagonale

$\Rightarrow \mathcal{E} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ è una base di autovettori ed è ortonormale

(5) (a) Si trovi un' equazione cartesiana del piano H di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per il punto $Q = (1, 0, 0)$ e parallelo al piano H' di equazioni parametriche

$$H' : \begin{cases} x = & 1-t \\ y = & 1-s \\ z = & s \end{cases} .$$

Equazione cartesiana per H' : $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & x-1 \\ 0 & -1 & y-1 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} = 2$

giacitura W di H' : $W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\Longleftrightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & x-1 \\ 0 & -1 & y-1 \\ 0 & 0 & z+y-1 \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow z+y-1=0 \; : H'$

eq. di W: $z+y=0$

Eq. di H: $z+y=d$; passaggio per $Q=(1,0,0) \Longrightarrow d=0$

$H : z+y=0$

(b) Si determini l' intersezione del piano H' con il piano di equazione

$$y = 0.$$

Nel caso che tale intersezione non sia vuota, se ne diano delle equazioni parametriche.

H': $y+z-1=0$

interseco con $y=0$; non sono paralleli $\Longrightarrow$ si int. in una retta r

$r : \begin{cases} y+z-1=0 \\ y=0 \end{cases}$ o equivalentemente $\begin{cases} z=1 \\ y=0 \end{cases}$

Eq. parametriche di r : $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$

Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2018/2019 - 28 gennaio 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

(1) Si dia la definizione di base di uno spazio vettoriale finitamente generato. Si enunci e si dimostri il Teorema del Completamento ad una base.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$, quindi $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 4\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix} = A$

(b) Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e un sua base e la dimensione di $\mathrm{Im} f$ e una sua base.

Oss. che $A^{(1)} + A^{(2)} = A^{(3)}$ e che $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$ sono lin. indipendenti (opp. ridurre a scala) $\Rightarrow$ rg $A = 2 = \dim \mathrm{Im} f$. $\dim \ker f = 3 - 2 = 1$
$\mathrm{Im} f = \mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$ con base $\{A^{(1)}, A^{(2)}\}$; base di $\ker f = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

(c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia $g_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$g_a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix}, \quad g_a\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\0\\4\end{pmatrix}.$$

Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g_a.$$

Oss. rg $g_a = 2$ $\forall a \in \mathbb{R}$; inoltre una base di $\mathrm{Im}\, g_a$ è $\left\{\begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\0\\4\end{pmatrix}\right\}$
Essendo $\dim \mathrm{Im}\, g_a = \dim \mathrm{Im} f$, se per qualche $a \in \mathbb{R}$ si ha $\mathrm{Im}\, g_a \subseteq \mathrm{Im} f$
$\Rightarrow$ vale $\mathrm{Im}\, g_a = \mathrm{Im} f$. Oss. che $\begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix} = 2 \cdot A^{(1)}$ e che $\begin{pmatrix}a\\0\\4\end{pmatrix} \in \mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}) \Leftrightarrow a = 4$

(d) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, si calcoli la dimensione di $\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g_a$ e la dimensione di $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g_a$.

Se $a = 4$, $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im}\, g_a \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im}\, g_a) = 2 = \dim(\mathrm{Im} f + \mathrm{Im}\, g_a)$
$\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im}\, g_a = \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f + \mathrm{Im}\, g_a$

Se $a \neq 4$, $\mathrm{Im} f \neq \mathrm{Im}\, g_a$; d'altra parte $\begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f$ $\forall a$
$\Rightarrow \dim \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im}\, g_a = 1$; per Grassmann
$\dim(\mathrm{Im} f + \mathrm{Im}\, g_a) = 2 + 2 - 1 = 3$

(3) Sia $A \in M_{m,n}$ una matrice. Si dimostri che

$$A \cdot {}^tA \quad \text{e} \quad {}^tA \cdot A$$

sono matrici quadrate simmetriche.

$A \in M_{m,n}(K)$, ${}^tA \in M_{n,m}(K)$; quindi $A \cdot {}^tA \in M_m(K)$
${}^tA \cdot A \in M_n(K)$

Una matrice B è simmetrica $\Leftrightarrow B = {}^tB$
se $B = A \cdot {}^tA$, ${}^tB = {}^t({}^tA) \cdot {}^tA = A \cdot {}^tA = B$
se $C = {}^tA \cdot A$, ${}^tC = {}^tA \cdot {}^t({}^tA) = {}^tA \cdot A = C$

(4) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si determinino i polinomi caratteristici di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ed $L_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dove

$$B = A \cdot {}^tA, \qquad C = {}^tA \cdot A$$

ed i loro spettri.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $p_B(t) = t(4-t)(t-10)$, $Sp(B) = \{0, 4, 10\}$

$C = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $p_C(t) = (10-t)(4-t)$, $Sp(C) = \{4, 10\}$

- Si trovi una base ortonormale di autovettori per L_C.

Oss. che $C = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(L_C)$ è diagonale

$\Rightarrow \mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di autovettori

(5) (a) Si trovi un' equazione cartesiana del piano H di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per il punto $Q = (0,1,1)$ e parallelo al piano H' di equazioni parametriche

$$H': \begin{cases} x = & t-s \\ y = & s-t \\ z = & t \end{cases} .$$

giacitura W di H': $W = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

eq. cartesiana per H': $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} = 2 \iff$

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & z-x \end{pmatrix} = 2 \iff x+y=0 : H'$

Eq. cartesiana di H: $x+y=d$; $x+y=1$

Passaggio per $Q=(0,1,1) \Rightarrow d=1$

(b) Si determini l' intersezione del piano H' con il piano di equazione

$$x = 0.$$

Nel caso che tale intersezione non sia vuota, se ne diano delle equazioni parametriche.

$H': x+y=0$

interseco con $x=0$; non sono paralleli, si int.

nella retta $r: \begin{cases} x+y=0 \\ x=0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$

Eq. parametriche di r: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$