Esercizi di Geometria
Ingegneria Industriale e Navale
2018/2019

September 21, 2018

1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Si dimostrino, usando gli assiomi di spazio vettoriale $V1, V2, \ldots, V8$, le seguenti proprietà:
   (a) per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ si ha
   $$0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0},$$
   dove $0 \in K$ indica l'elemento neutro rispetto alla somma in K, e $\mathbf{0} \in V$ indica il vettore nullo, cioè l'elemento neutro rispetto alla somma in V.
   (b) per ogni $t \in K$ si ha
   $$t \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$
   (c) In V esiste un unico vettore nullo.
   (d) Ogni vettore $\mathbf{v}$ ha un unico opposto.
   (e) Per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha
   $$(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v},$$
   dove $1 \in K$ denota l'elemento neutro per il prodotto in K, -1 il suo opposto e $-\mathbf{v}$ l'opposto di $\mathbf{v}$.

2. Si consideri il campo $K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ e si consideri lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$:
   $$\mathbb{Z}_2\ [x].$$
   Si elenchino tutti gli elementi di $\mathbb{Z}_2\ [x]$ di grado minore o uguale a tre, e si detrminino le seguenti somme:
   $$(x^3+x)+(x+1), \qquad (x^3+x^2)+(x^3+1), \qquad (x^3+x^2)+(x^3+1), \qquad x^3+x^3, \qquad x^2+x^2.$$

3. Si consideri il campo $K = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ e si consideri lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in $\mathbb{Z}_3$:
   $$\mathbb{Z}_3\ [x].$$
   Si elenchino tutti gli elementi di $\mathbb{Z}_3\ [x]$ di grado minore o uguale a due, e si detrminino le seguenti somme:
   $$(x^3+2x)+(x+1), \qquad (2x^3+x^2)+(2x^3+1), \qquad (x^3+2x^2)+(x^3+2), \qquad (x^3+2x^2)+(x^3+1).$$