CORSO DI GEOMETRIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ED ARCHITETTURA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE
A.A. 2018/2019
PROF. VALENTINA BEORCHIA

INDICE

1. VETTORI APPLICATI E LORO OPERAZIONI

L'algebra lineare e la geometria affine sono due teorie che sono state sviluppate negli ultimi due secoli sul modello dell'algebra dei vettori liberi in un piano o in uno spazio fisico, le cui proprietà sono una conseguenza degli assiomi classici della geometria euclidea. L'algebra lineare come strumento si 'e rivelata molto potente, perché applicabile a svariati contesti diversi, ha permesso di organizzare la geometria dello spazio euclideo in modo più efficiente sia dal punto di vista teorico che dal punto di vista computazionale rispetto all'approccio antico, e perché è alla base della moderna Analisi Funzionale.

È utile, in ogni caso, richiamare e rivedere velocemente la geometria e le operazioni con i vettori applicati e i vettori liberi, che permette di comprendere meglio la scelta delle definizione e degli assiomi dell'algebra lineare, e sarà di aiuto durante tutto il corso per la comprensione degli argomenti più complicati.

Consideriamo un piano o uno spazio "fisico". Un vettore applicato è il dato da una coppia di punti di: un punto iniziale A, detto anche punto di applicazione, ed un punto finale B, e verrà indicato con

$$\vec{AB}.$$

Osserviamo che ci sono vettori del tipo $\vec{AA}$, cioè tali che il punto di applicazione coincide con il punto finale, detti vettori applicati nulli.

Definizione 1.1. La somma di due vettori applicati del tipo $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$ è per definizione il vettore

$$\vec{AB} + \vec{BC} := \vec{AC}.$$

Osservazione 1.2. *La somma di un vettore $\vec{AB}$ con un vettore nullo del tipo $\vec{AA}$ oppure $\vec{BB}$ verifica:*

$$\vec{AA} + \vec{AB} = \vec{AB}, \qquad \vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB}.$$

Inoltre la somma verifica la proprietà associativa:

$$\vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}) = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD}.$$

Definizione 1.3. La moltiplicazione di un vettore applicato per uno scalare è definita come segue: per ogni vettore applicato $\vec{AB}$ e per ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$, il vettore $a \cdot \vec{AB}$ è quel vettore geometrico che ha

- la stessa direzione di $\vec{AB}$,
- lunghezza pari a quella di $\vec{AB}$ moltiplicata per il valore assoluto $|a|$ di a,
- verso concorde con $\vec{AB}$ se $a > 0$, altrimenti ha verso opposto. Se $a = 0$ si pone $0 \cdot \vec{AB} = \vec{AA}$.

2. Vettori liberi (o geometrici)

Due vettori applicati sono detti equipollenti se hanno la stessa direzione, la stessa lunghezza e lo stesso verso; in altre parole se giacciono su due rette parallele e se, muovendo una delle due rette parallelamente a se stessa, è possibile sovrapporre i due vettori in modo che i relativi punti iniziali e finali coincidano.

Si osservi che l'equipollenza è una relazione di equivalenza nell'insieme dei vettori applicati. Infatti ci si convince facilmente che valgono le seguenti proprietà: riflessiva, simmetrica e transitiva. Un vettore libero o geometrico è una classe di equivalenza di vettori applicati per la relazione di equipollenza (in questo contesto si dice anche classe di equipollenza). Denoteremo tra le parentesi quadre $[\vec{AB}]$ le classi di equipollenza dei vettori applicati ed i corrispondenti vettori liberi con le lettere minuscole:

$$\vec{u} = [\vec{AB}].$$

Il vettore nullo $\vec{0}$ è quel vettore rappresentato da un vettore applicato del tipo $\vec{AA}$.

Osservazione 2.1. *Fissato un punto O del piano o dello spazio, ogni vettore geometrico $\vec{v}$ 'e rappresentato da un unico vettore applicato $\vec{OP}$. Questa affermazione segue dal quinto postulato della geometria euclidea.*

Nell'insieme dei vettori geometrici è possibile definire due operazioni: la somma di vettori e la moltiplicazione per uno scalare reale.

Definizione 2.2. La somma di due vettori geometrici $\vec{v} = [\vec{AB}]$ e $\vec{u} = [\vec{BC}]$ è così definita:

$$\vec{v} + \vec{u} = [\vec{AB}] + [\vec{BC}] := [\vec{AB} + \vec{BC}] = [\vec{AC}].$$

Osservazione 2.3. *Si può verificare facilmente che la definizione è ben posta, cioè non dipende dai due rappresentanti scelti.*

Inoltre, se i vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$ non sono allineati o nulli, la somma si può definire anche tramite la regola del parallelogramma:

se $\vec{v} = [\vec{OP}]$ e $\vec{u} = [\vec{OQ}]$, si costruisce il parallelogramma di lati OP ed OQ e si denota con R il quarto vertice di tale parallelogramma. La somma $\vec{v} + \vec{u}$ risulta uguale al vettore geometrico rappresentato da $\vec{OR}$.

Osservazione 2.4. *L'operazione di somma tra due vettori geometrici soddisfa le seguenti proprietà:*

- *proprietà associativa: per ogni scelta di una terna di vettori geometrici $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, si ha:*
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}).$$
Sfruttando questa proprietà possiamo, ad esempio, scrivere espressioni come $u + v + w$.
Possiamo verificare la proprietà associativa graficamente.

- *Proprietà commutativa: per ogni coppia di vettori geometrici $\vec{v}$ e $\vec{u}$ si ha*
$$\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}.$$
Graficamente:

- *Esistenza dell'elemento neutro: se denotiamo con $\vec{0}$ il vettore nullo, allora per ogni vettore geometrico $\vec{v}$ vale:*
$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}.$$
- *Esistenza dell'opposto: per ogni vettore geometrico $\vec{v}$, esiste il suo opposto, cioè un vettore geometrico $-\vec{v}$, tale che*
$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0},$$
dove $\vec{0}$ è il vettore nullo.
Infatti, si consideri un rappresentante $\vec{AB}$ di $\vec{v}$, e si definisca $-\vec{v}$ come la classe di equipollenza di $\vec{BA}$.
In seguito, per ogni coppia di vettori $\vec{v}, \vec{w}$, scriveremo semplicemente
$$\vec{v} - \vec{w}$$
in luogo di
$$\vec{v} + (-\vec{w}).$$

Nell'insieme dei vettori geometrici, oltre alla somma di due vettori, possiamo definire la moltiplicazione per scalari in modo analogo sfruttando la moltiplicazione per scalari con vettori applicati.

Definizione 2.5. Per ogni vettore geometrico $\vec{v} = [\vec{AB}]$ e per ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$ poniamo

$$a \cdot \vec{v} := [a \cdot \vec{AB}].$$

Anche in questo caso è facile verificare che la definizione è ben posta, cioè non dipende dal rappresentante.

Proprietà dell'operazione di moltiplicazione per scalari: per ogni coppia di vettori geometrici $\vec{v}, \vec{w}$ e per ogni coppia di scalari $a, b \in \mathbb{R}$, si ha:

- $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$;
- $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$;
- $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$; $(ab) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$; $a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$.

Sul modello dell'insieme dei vettori geometrici con le due operazioni appena descritte e le loro proprietà introduciamo la seguente definizione di spaizo vettoriale. Osserviamo che la nuovo definizione è molto generale e comprende molti spazi di natura molto diversa.

Definizione 2.6. Uno spazio vettoriale reale o $\mathbb{R}$-spazio vettoriale è un insieme non vuoto V su cui sono definite due operazioni,una somma

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V, \\ (v, w) &\to v + w, \end{aligned}$$

ed un prodotto per scalari

$$\begin{aligned} \cdot : K \times V &\to V, \\ (a, v) &\to a \cdot v, \end{aligned}$$

in modo che siano soddisfatti i seguenti assiomi, per ogni $u, v, w \in V$, e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$:

(1) V1: proprietà associativa:
$$(u + v) + w = u + (v + w);$$
(2) V2: proprietà commutativa:
$$u + v = v + u;$$
(3) V3: esistenza del vettore nullo: esiste $0 \in V$ tale che
$$0 + v = v + 0 = v;$$
(4) V4: esistenza dell'opposto: per ogni $v \in V$, esiste un vettore $-v \in V$ tale che
$$v + (-v) = (-v) + v = 0;$$
(5) V5: distributiva di $\cdot$ rispetto a $+$:
$$a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v;$$
(6) V6: distributiva di $\cdot$ rispetto alla somma di $\mathbb{R}$:
$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v;$$
(7) V7: $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$;

(8) V8: per ogni $v \in V$ si ha
$$1 \cdot v = v.$$
. Notiamo che abbiamo utilizzato lo stesso simbolo 0 per denotare sia il vettore nullo che lo zero come numero reale, per non appesantire la notazione. Inoltre, nel seguito, espressioni del tipo $v + (-w)$ verranno semplificate con $v - w$.

Esempi 2.7. (1) L'insieme dei vettori geometrici del piano $\mathcal{V}^2$ o dello spazio $\mathcal{V}^2$ con le operazioni descritte all'inizio del capitolo è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

(2) L'insiemi dei numeri reali $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con le usuali definizioni di somma tra numeri reali e prodotto tra numeri reali, dove questa volta il prodotto
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (a, b) \to a \cdot b$$
viene considerato come operazione "esterna", nel senso che $\mathbb{R}$ gioca sia il ruolo di insieme degli scalari che il ruolo di spazio dei vettori.

(3) il prodotto cartesiano
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$
con l' operazione di somma così definita:
$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$
e di moltiplicazione per uno scalare:
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left(c, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \to c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot x_2 \end{pmatrix}$$
verifica gli assiomi per uno spazio vettoriale reale.

(4) Più in generale, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ per se stesso n -volte:
$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$
con l' operazione di somma così definita:
$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$
e di moltiplicazione per uno scalare:
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left(c, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \to c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot x_2 \\ \vdots \\ c \cdot x_n \end{pmatrix}$$
verifica gli assiomi per uno spazio vettoriale reale.

(5) L'insieme delle funzioni reali

$$\mathcal{F} := \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\},$$

con l'operazione di somma (definita puntalmente):

$$+ : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}, \qquad (f,g) \to f+g \ : \ (f+g)(r) := f(r) + g(r),$$

e la moltiplicazione per uno scalare

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}, \qquad (c,f) \to c \cdot f \ : \ (c \cdot f)(r) := c \cdot f(r)$$

è uno spazio vettoriale reale.

(6) L'insieme dei polinomi reali in una indeterminata:

$$\mathbb{R}[x] := \{p(x) \mid p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \ a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

con l'usuale somma tra polinomi e l'usuale prodotto per uno scalare è uno spaizo vettoriale reale.

3. Campi

Vogliamo ora generalizzare ancora la nozione di spazio vettoriale, sostituendo a $\mathbb{R}$ un insieme arbitrario, che abbia delle proprietà algebriche simile ad $\mathbb{R}$, cioè che sia un campo.

Definizione 3.1. Un campo è un insieme non vuoto $\mathbb{K}$ dotato di due operazioni interne, una somma

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \qquad (a,b) \to a+b,$$

ed un prodotto

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \qquad (a,b) \to a \cdot b,$$

che in seguito sarà denotato anche con ab, in modo che siano soddisfatti i seguenti assiomi, per ogni $a, b, c \in \mathbb{K}$:

(1) K1: commutatività $a + b = b + a$, $ab = ba$;
(2) K2: associatività $(a + b) + c = a + (b + c)$, $a(bc) = (ab)c$;
(3) K3: esistenza dell'elemento neutro $\exists 0 \in \mathbb{K}$, tale che $a + 0 = a$, inoltre $\exists 1 \in \mathbb{K}$ tale che $a1 = a$;
(4) K4: esistenza dell'opposto e dell'inverso $\exists -a \in \mathbb{K}$ tale che $a + (-a) = 0$; se $a \neq 0$, $\exists a^{-1} \in \mathbb{K}$ tale che $aa^{-1} = 1$;
(5) K5: distributività di $\cdot$ rispetto ad $+$ $a(b + c) = ab + ac$.

Esempi 3.2. Esempi di campi sono i numeri razionali $\mathbb{Q}$, i numeri reali $\mathbb{R}$, i numeri complessi $\mathbb{C}$, le classi $\mathbb{Z}_n$ di congruenza modulo n con n numero primo (da completare).

Definizione 3.3. Uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ è un insieme non vuoto che verifichi gli assiomi $V1, \ldots, V8$ con $\mathbb{K}$ al posto di $\mathbb{R}$.

4. ESERCIZI

(1) Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Si dimostrino, usando gli assiomi di spazio vettoriale $V1, V2, \ldots, V8$, le seguenti proprietà:

(a) per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ si ha

$$0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

dove $0 \in K$ indica l'elemento neutro rispetto alla somma in K, e $\mathbf{0} \in V$ indica il vettore nullo, cioè l'elemento neutro rispetto alla somma in V.

Infatti, sfruttando il fatto che $0 \in \mathbb{K}$ è l'elemento neutro per la somma e per la $V5$, abbiamo le seguenti uguaglianze:

$$0 \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{0} + \mathbf{0}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{0} \cdot \mathbf{v}.$$

Aggiungendo ora l'opposto $-0 \cdot v$ di $0 \cdot \mathbf{v}$ a destra e sinistra e sfruttando la $V3$, concludiamo che $\mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{v}$.

(b) per ogni $t \in K$ si ha

$$t \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Infatti, sfruttando le $V3$ e $V5$, deduciamo che

$$a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{0}.$$

Aggiungendo $-a \cdot \mathbf{0}$ a destra e sinistra, e sfruttando la $V4$, concludiamo che $\mathbf{0} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{0}$.

(c) In V esiste un unico vettore nullo.

Infatti, supponiamo per assurdo che esistano due vettori nulli $\mathbf{0}$ e $\mathbf{0}' \in \mathbf{V}$, cioè tali che

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v},$$
$$\mathbf{v} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{v} = \mathbf{v},$$

per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Allora, in particolare, per il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si avrebbe:

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'.$$

Quindi un assurdo.

(d) Ogni vettore $\mathbf{v}$ ha un unico opposto.

Infatti, se $\mathbf{v}$ avesse due opposti, $-\mathbf{v}$ e $-\mathbf{v}'$, allora si avrebbe:

$$-\mathbf{v} = -\mathbf{v} + \mathbf{0} = -\mathbf{v} + (\mathbf{v} + (-\mathbf{v}')) = (-\mathbf{v} + \mathbf{v}) + (-\mathbf{v}') = \mathbf{0} + (-\mathbf{v}') = -\mathbf{v}'.$$

Che è un assurdo.

(e) Per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ si ha

$$(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v},$$

dove $1 \in K$ denota l'elemento neutro per il prodotto in K, -1 il suo opposto e $-\mathbf{v}$ l'opposto di $\mathbf{v}$.

Infatti,

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{1}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{v} + (-\mathbf{1}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{1} - \mathbf{1}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Quindi $(-1) \cdot \mathbf{v}$ è un vettore opposto di $\mathbf{v}$, ma poiché l'opposto è unico, esso coincide con $-\mathbf{v}$.

(2) Si consideri il campo $K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ e si consideri lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$:

$$\mathbb{Z}_2\,[x].$$

Si elenchino tutti gli elementi di $\mathbb{Z}_2\,[x]$ di grado minore o uguale a tre, e si detrminino le seguenti somme:

$$(x^3 + x) + (x + 1), \qquad (x^3 + x^2) + (x^3 + 1), \qquad (x^3 + x^2) + (x^3 + 1), \qquad x^3 + x^3, \qquad x^2 + x^2.$$

(3) Si consideri il campo $K = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ e si consideri lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in $\mathbb{Z}_3$:

$$\mathbb{Z}_3\,[x].$$

Si elenchino tutti gli elementi di $\mathbb{Z}_3\,[x]$ di grado minore o uguale a due, e si detrminino le seguenti somme:

$$(x^3+2x)+(x+1), \qquad (2x^3+x^2)+(2x^3+1), \qquad (x^3+2x^2)+(x^3+2), \qquad (x^3+2x^2)+(x^3+1).$$