

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
AA 2017/18
ESERCIZI FOGLIO N. 1

In questi esercizi si indica con μ^* la misura esterna di Lebesgue.

(1) Provare che per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ vale

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum \lambda(I_k) \mid E \subset \cup I_k, I_k \text{ intervalli chiusi e limitati} \right\} .$$

(2) Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ tale che, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono insiemi di Lebesgue A, B tali che $A \subset E \subset B$ e

$$\mu^*(B \setminus A) < \varepsilon .$$

Provare che E è di Lebesgue.

(3) Siano I, J due intervalli disgiunti. Siano A, B due insiemi qualunque tali che $A \subset I, B \subset J$, provare che vale

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) .$$

(4) Siano rispettivamente μ^*, μ, \mathcal{L} misura esterna, misura e σ -algebra di Lebesgue di \mathbb{R}^n . per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ si ponga

$$\bar{\mu}(E) = \inf \left\{ \sum_k \mu(A_k) \mid \{A_k\} \subset \mathcal{L}, E \subset \bigcup_k A_k \right\} .$$

Provare che $\bar{\mu} = \mu^*$.