ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
A.A. 16/17 ESERCIZI 1

(1) Una funzione
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
si dice *semicontinua inferiormente* (*sci*) nel punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se
$$f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x) \ .$$
(Si ricorda che
$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\delta \to 0+} \inf_{0 < |x - x_0| < \delta} f(x) \ .)$$

(a) Provare che f è *sci* in tutti i punti di $\mathbb{R}^n$ se e solo se per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme
$$\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > t\}$$
è aperto.

(b) Provare che, se f è *sci* in tutti i punti di $\mathbb{R}^n$, allora è misurabile rispetto alla misura di Lebesgue.

(2) Sia
$$\mathcal{C} = \{(a, b] | a, b \in [-\infty, +\infty], a \leq b\} \ .$$
Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e continua da destra in ogni punto (cioè: $F(x) = \lim_{y \to x+} F(y) \ \forall x \in \mathbb{R}$). Poniamo
$$\begin{cases} F(-\infty) = \lim_{y \to -\infty} F(y) \ , \\ F(+\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(y) \ . \end{cases}$$
Provare le seguenti affermazioni:

(a) $\mathcal{C}$ è una semialgebra su $(-\infty, +\infty]$.

(b) Posto $\mu((a, b]) = (F(b) - F(a))$, μ è una misura sulla semialgebra $\mathcal{C}$.

(c) μ si estende a una misura sulla σ-algebra $\mathcal{B}$ di Borel su $\mathbb{R}$.

(d) chiamando sempre μ questa misura estesa e preso $a \in \mathbb{R}$, stabilire quanto vale $\mu(\{a\})$.

(3) Sia fissato uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$, sia f una funzione su X e sia E un sottoinsieme denso di $\mathbb{R}$ tale che l'insieme $\{f > t\}$ è misurabile per ogni $t \in E$. Provare che f è misurabile.