ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
SECONDO FOGLIO ESERCIZI 17/18

(1) (a) Sia E un insieme misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$, di misura positiva. Provare che per ogni $p \in (0, \mu(E))$ esiste un insieme misurabile $E_p \subset E$ tale che $\mu(E_p) = p$.
(b) Sia $f \geq 0$ una funzione integrabile secondo Lebesgue su $\mathbb{R}$, e si ponga per ogni $t \geq 0$:

$$\mu(t) = \mu(\{f > t\}) \ .$$

Provare che per ogni $s > 0$

$$\lim_{t \to s-} \mu(t) = \mu(\{f \geq s\}) \ ,$$

$$\lim_{t \to s+} \mu(t) = \mu(s) \ .$$

(c) Sia $f \geq 0$ una funzione integrabile secondo Lebesgue su $\mathbb{R}$, provare che per ogni $c > 0$ esiste un insieme misurabile F di misura c tale che

$$\int_F f = \sup \left\{ \int_E f \mid E \text{ misurabile t.c. } \mu(E) = c \right\} \ .$$

(2) Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura σ–finito e completo, sia $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ la retta reale con la misura di Lebesgue. Sia

$$(X \times \mathbb{R}, \mathcal{A} \times \mathcal{L}, \mu \times \lambda)$$

il loro spazio prodotto. Siano f, g due funzioni integrabili su X calcolare la misura prodotto dell'insieme

$$E = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} | f(x) < t < g(x)\} \ .$$

(3) Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su X, tale che

$$\lim_{n \to \infty} \int_X [e^{|f_n|} - 1] d\mu = 0 \ .$$

Provare che $f_n \to 0$ in misura.