ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
AA 2016/17
ESERCIZI FOGLIO N.2

(1) Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile e di misura nulla. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua in ogni punto $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$. Provare che f è misurabile.

(2) Sia $E \subset [0,1]$ si ponga $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in E \ , \\ -x & \text{se } x \in [0,1] \setminus E \ . \end{cases}$$

(a) Provare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{f = \alpha\}$ è misurabile.

(b) Provare che f è misurabile se e solo se E è misurabile.

(3) Sia μ_n^* la misura esterna di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$, si indichi rispettivamente con $\mathcal{L}^n, \mu_n$ la σ-algebra degli insiemi di Lebesgue e la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$.

(a) Presi $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$ aperti non vuoti, provare che

$$\mu_{n+m}(A \times B) = \mu_n(A)\mu_m(B) \ .$$

(b) Presi $A \in \mathcal{L}^n, B \in \mathcal{L}^m$ tali che $\mu_n(A) < \infty, \mu_m(B) < \infty$, provare che

$$\mu_{n+m}^*(A \times B) = \mu_n(A)\mu_m(B) \ .$$

(4) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e siano $\underline{f}, \overline{f}$ date da:

$$\underline{f}(x) = \sup\{\varphi(x) | \varphi \text{ a scalino } \varphi \le f\} \ , \forall x \ \in [a,b] \ ,$$

$$\overline{f}(x) = \inf\{\psi(x) | \psi \text{ a scalino } \psi \ge f\} \ , \forall x \ \in [a,b] \ .$$

Provare che se f è continua in $x_0 \in [a,b]$ allora $\underline{f}(x_0) = \overline{f}(x_0)$.

(5) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si ricorda che f si dice semicontinua inferiormente in $x_0 \in [a,b]$ se

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \ge f(x_0) \ .$$

Supponiamo che f sia tale che esiste una successione di funzioni a scalino $\{\varphi_k\}$ per cui

$$f(x) = \sup\{\varphi_k(x) | k = 1, 2, \ldots\} \ , \forall x \ \in [a,b] \ .$$

Provare che esiste un insieme $P \subset [a,b]$ al più numerabile tale che f è semicontinua inferiormente in ogni $x \in [a,b] \setminus P$.