ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 04/07/16

(1) Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni misurabili su X tale che

$$\lim_{k\to\infty} \int_X \left(e^{|f_k|^4} - 1 \right) d\mu = 0 \ .$$

Stabilire per quali $p \geq 1$ vale che $f_k \to 0$ in L^p.

(2) Si ponga, per ogni $x \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & , \text{ se } \quad |x| < 1 \ , \\ 0 & , \text{ se } \quad |x| \geq 1 \ . \end{cases}$$

Definiamo per induzione la successione $\{f_k\}$ di funzioni su $\mathbb{R}^2$ nel seguente modo

$$f_1 = f, f_{k+1} = f * f_k \ .$$

Calcolare, per ogni k, $\int_{\mathbb{R}^2} f_k$ e determinare qual è l'insieme di livello $\{f_k > 0\}$.

(3) Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su X, tale che $f_n \to 0$ in misura. Sia g una funzione misurabile su X tale che per ogni $\eta > 0$ esiste $t > 0$ per cui $\mu(\{|g| > t\}) < \eta$. Provare che

$$g f_n \to 0$$

in misura.