1) $e^{|f_k|^4} - 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|f_k|^{4j}}{j!} \geq \frac{|f_k|^{4j}}{j!} \quad \forall j \geq 1$

Quindi $\int_X |f_k|^{4j} \to 0 \quad \forall j \geq 1$

Cioè $f_k \to 0$ in L^{4j} $\forall j \geq 1$.

Sia $p \geq 4$ qualunque, $\exists!\, j$ t.c.

$4j \leq p < 4(j+1)$. Se $p = 4j$ non

c'è niente da dim. Se $4j < p < 4(j+1)$

$\|f_k\|_p \leq \|f_k\|_{4j}^{\alpha} \|f_k\|_{4(j+1)}^{1-\alpha}$ con $\alpha \in (0,1)$

t.c. $\frac{\alpha}{4j} + \frac{1-\alpha}{4(j+1)} = \frac{1}{p}$. Quindi $\|f_k\|_p \to 0$

$\forall p \geq 4$.

2) $f \in L^1$, quindi $f_2 = f * f \in L^1$ per

Young e per induzione $f_k \in L^1$ $\forall k$.

$f \geq 0$, di conseguenza $f_k \geq 0$ $\forall k$.

$\int f_{k+1} = \int dx \int f(x-y) f_k(y)\, dy = \int f(z)\, dz \int f_k(y)\, dy$

Quindi per induzione $\int f_{k+1} = \left(\int f\right)^{k+1}$

Ora si calcola $\int f = \frac{\pi}{3}$

quindi $\int f_k = \left(\frac{\pi}{3}\right)^k$.

Studiamo ora l'insieme $\{f_2 > 0\}$

$$f_2(x) = \int f(x-y) f(y)\, dy = \int_{\substack{|x-y|<1 \\ |y|<1}} f(x-y) f(y)\, dy$$

l'integrale è > 0 sse $B_1(0) \cap B_1(x) \neq \emptyset$

Questo si verifica sse $|x| < 2$. Cioè

$\{f_2 > 0\} = B_2(0)$. Per induzione si

dimostra $\{f_k > 0\} = B_k(0)$.

3) Sappiamo che $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\{|f_n| > \varepsilon\}) = 0$$

Consid. l'insieme $\{|g f_n| > \varepsilon\}$, e si scelga $\eta = \varepsilon$, sia t t.c.

$$\mu(\{|g| > t\}) < \varepsilon$$

$$\{|g f_n| > \varepsilon\} \subset \{|g| > t\} \cup \{|g| \leq t, |g f_n| > \varepsilon\} \subset$$

$$\subset \{|g| > t\} \cup \{t|f_n| > \varepsilon\}$$

$$\mu(\{|g f_n| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon + \mu\left(\left\{|f_n| > \frac{\varepsilon}{t}\right\}\right)$$

Quindi $\exists N$ t.c. $\forall n \geq N$

$$\mu\left(\left\{|f_n| > \frac{\varepsilon}{t}\right\}\right) < \varepsilon$$

allora

$$\mu(\{|g f_n| > \varepsilon\}) \leq 2\varepsilon \quad \forall n \geq N.$$