ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 13/6/16

(1) Sia dato uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Sia $\{E_n\}$ una successione di insiemi misurabili di misura finita tali che

$$\mu(E_n \triangle E_m) \to 0 \ , \ \text{per } n, m \to \infty \ .$$

Provare che esiste E misurabile di misura finita tale che

$$\mu(E_n \triangle E) \to 0 \ , \ \text{per } n \to \infty \ .$$

(2) Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$, calcolare, se esiste,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x-k^2) f(x+k) d\mu(x) \ .$$

(3) Sia $f \in L^1(\mathbb{R}), f \geq 0$. Sia $\{a_k\}$ una successione di numeri positivi. Posto $f_k(x) = f(a_k x)$ per ogni $k = 1, 2, \ldots$, si definisca per induzione

$$F_1 = f_1 \ ,$$
$$F_{k+1} = f_{k+1} * F_k \ , k = 1, 2, \ldots \ .$$

a) Calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} F_k \ , \ \text{per ogni } k = 1, 2, \ldots \ .$$

b) Supponendo inoltre $a_k \leq \int_{\mathbb{R}} f$ per ogni k, stabilire sotto quali condizioni esiste finito

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} F_k \ .$$