SERIE DI FOURIER

E

ALTRE RAPPRESENTAZIONI ANALITICHE

DELLE

FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE

PER

ULISSE DINI

PROFESSORE ORDINARIO NELLA R. UNIVERSITÀ DI PISA

PISA

TIPOGRAFIA T. NISTRI E C.

1880

I. Considerazioni generali.

1. Uno dei problemi più interessanti dell'analisi è quello di cercare se e in quali casi le funzioni di una variabile reale date arbitrariamente in un certo intervallo finito o infinito (a,b) possono esprimersi analiticamente per ogni valore di x fra a e b, per modo cioè che i valori della funzione data per questi valori di x possano tutti ottenersi per mezzo di una serie finita o infinita di operazioni di calcolo da farsi sulla variabile.

Però un problema posto in una maniera così generale non potrebbe risolversi, o almeno difficilmente potrebbe aversi un metodo per trattarlo, ove non si stabilisse qualche cosa intorno alla natura della espressione analitica che, quando la cosa sia possibile, dovrà rappresentare la funzione; ed è perciò che nelle ricerche di questo genere che finora sono state fatte si è sempre limitato il problema stesso cercando soltanto se ed in quali casi una funzione data arbitrariamente in un certo intervallo può avere una espressione analitica di forma data.

I risultati che così si sono ottenuti possono dirsi di una straordinaria importanza, non tanto per l'Analisi, quanto, e più specialmente, per le loro applicazioni alla Fisica matematica; e noi ne esporremo alcuni dei principali, avendo però più particolarmente in mira la rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale per mezzo di serie convergenti formate con date funzioni speciali della variabile, o per mezzo di certi integrali definiti.

2. Il problema generale della rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale data arbitrariamente in un certo intervallo, sarebbe sorto naturalmente dopo la introduzione che Dirichlet fece nella scienza del suo concetto di funzione (*). Limitato però alla rappresentazione delle funzioni per mezzo di serie trigonometriche, questo problema può dirsi ormai vecchio e celebre nella storia della scienza; e può dirsi anzi che per esso appunto Dirichlet sia stato condotto alla sua definizione generale della parola *funzione*.

Questo problema infatti si è presentato per la prima volta verso la metà del secolo scorso nel trattare una questione di Fisica matematica, quella cioè delle corde vibranti.

Con alcune supposizioni prossime alla realtà, era stato trovato che la forma di una corda che vibra in un piano, alla fine del tempo t è data dalla equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{1}$$

ove α è una costante, e x e y sono le coordinate ortogonali situate nel detto piano coll'origine in uno degli estremi della corda, e l'asse delle x disposto secondo la retta (orizzontale) che passa per gli estremi della corda stessa.

D'Alembert prendendo a studiare questo problema delle corde vibranti, trovò pel primo che la soluzione generale della equazione (1) era data dalla formola:

$$y=f(x+\alpha t)+\varphi(x-\alpha t),$$

ove f e φ sono due funzioni arbitrarie; e poi osservando che, se l è la lunghezza della corda nella posizione di equilibrio, y doveva essere zero per qualunque valore di t ai punti estremi $x=0$, $x=l$ della corda, ne dedusse che le funzioni f e φ dovevano soddisfare alle equazioni:

(*) Avanti Dirichlet, per es. da Monge, si era definita la parola funzione in un modo quasi così generale come quello di Dirichlet; però allora vi era sempre espresso o sottinteso il concetto della esistenza di una data espressione analitica per la funzione medesima.

$$f(\alpha t)=-\varphi(-\alpha t),\qquad f(l+\alpha t)=-\varphi(l-\alpha t),$$

le quali cambiando αt in z davano:

$$f(z)=-\varphi(-z)=-\varphi(l-(l+z))=f(2l+z),$$

per modo che si poteva concludere che la soluzione generale del problema delle corde vibranti era contenuta nella equazione:

$$y=f(\alpha t+x)-f(\alpha t-x),$$

ove f è il simbolo di una funzione arbitraria per la quale si ha $f(z)=f(2l+z)$.

Dopo D'Alembert, anche Eulero prese a trattare il problema di cui parliamo, e trovò che la funzione f, e quindi le vibrazioni della corda restavano pienamente determinate, quando era data la forma della corda e la velocità di ognuno dei suoi punti (cioè y e $\frac{\partial y}{\partial t}$), e così venne a completare la soluzione del D'Alembert.

La memoria di Eulero diede occasione ad un altra di D'Alembert nella quale egli mosse alcune obiezioni contro la estensione fatta da Eulero del suo metodo; e dopo questa ne comparve una di Daniele Bernoulli nella quale venne data una nuova soluzione del problema fondata sopra una osservazione fatta qualche tempo prima da Taylor.

Taylor aveva osservato che la funzione:

$$y=\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi t\alpha}{l},$$

con n intero qualunque soddisfaceva alla equazione (1), e alle condizioni $y=0$ per $x=0$ e $x=l$ qualunque sia t, e aveva spiegato così il fatto fisico che una corda, oltre il suono fondamentale che gli è proprio, può dare anche il suono fondamentale di una corda della stessa costituzione e di una lunghezza $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$ della sua; Bernoulli guidato da questa osservazione, e dall'altra che una corda poteva dare anche contemporaneamente questi suoni, ne dedusse che essa avrebbe potuto vibrare anche conformemente alla equazione:

$$y = \Sigma a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi\alpha(t-b_n)}{l}, \tag{2}$$

ove le a_n e b_n sono costanti arbitrarie; e poi avendo riconosciuto che con questa formola qualsiasi fenomeno del suono veniva spiegato, ne concluse che essa doveva essere la formola generale.

Dopo questo lavoro di Bernoulli ne comparve un altro di Eulero nel quale questo celebre matematico rispondeva alle obiezioni fattegli da D'Alembert, e osservava contro Bernoulli che, siccome per ogni valore del tempo t la formola (2) dava la equazione della corda sotto la forma:

$$y = \Sigma \alpha_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \tag{3}$$

bisognava concluderne che la detta formola (2) non somministrava la soluzione generale del problema, in quantochè, almeno per un dato istante la forma della corda poteva darsi arbitrariamente, e non era dimostrato che una curva qualunque data arbitrariamente fra due ascisse 0 e l potesse sempre rappresentarsi con una equazione della forma (3); e anzi si riteneva allora come impossibile di rappresentare una curva algebrica, o più generalmente una curva analitica data e non periodica, per mezzo di una espressione periodica come quella scritta sopra o anche come l'altra:

$$y = \Sigma \alpha_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} + \Sigma \beta_n \cos \frac{n\pi x}{l}. \tag{4}$$

Il problema era portato a questo punto, e incidentalmente aveva dunque fatto nascere la questione se una curva data arbitrariamente fra 0 e l potesse o nò rappresentarsi sempre con una equazione della forma (3) o (4), per quanto, ritenendosi allora la cosa del tutto impossibile, una tal questione venisse posta immediatamente da parte; nè ancora le questioni sorte fra Eulero, D'Alembert, e Bernoulli potevano dirsi decise, ma soltanto Eulero e D'Alembert si trovavano d'accordo nel ritenere che la soluzione del Bernoulli non fosse la soluzione generale del problema delle corde vibranti.

Fu allora che Lagrange, ancor giovanissimo, prese a studiare egli pure il problema, e ne dette una soluzione in un modo tutto nuovo, quantunque non altrettanto rigoroso. In questo lavoro egli ebbe occasione di dare la formola che esprime per una serie *finita* di funzioni circolari la ordinata di una curva che passa per un numero *finito* di punti disposti comunque su rette equidistanti parallele all'asse delle y; ma per quanto, avendo usato il segno $\int$ per rappresentare quelle somme che ora rappresenteremmo con Σ, e avendo usato il segno dx per rappresentare l'intervallo finito Δx, Lagrange giungesse a una formola che col farvi $n=\infty$ concorda pienamente con quella che fu trovata più tardi per una funzione qualunque, è certo però che, avendo il Lagrange tralasciato di studiare il passaggio dal finito all'infinito, la questione della possibilità o impossibilità di rappresentare una curva data arbitrariamente in un certo intervallo con una equazione della forma (3) o (4) restò ancora insoluta. Nè l'insieme della memoria di Lagrange mostra che egli pensasse che una funzione del tutto arbitraria potesse realmente rappresentarsi con una serie di seni o con una serie di seni e coseni; ma anzi mostra piuttosto che egli intraprese il suo lavoro perchè credeva che queste funzioni arbitrarie non fossero esprimibili per una formola, e solo credeva che le serie trigonometriche potessero rappresentare ogni funzione periodica data analiticamente.

3. Dopo il lavoro di Lagrange, la questione della possibilità della rappresentazione per serie trigonometriche delle funzioni date arbitrariamente non fece alcun passo per circa un mezzo secolo; quando inaspettatamente Fourier nel 1807, più per divinazione è vero che per dimostrazione, dette la formola che porta il suo nome, e mediante la quale ogni funzione $f(x)$ data arbitrariamente fra $-\pi$ e π, sotto certe condizioni pochissimo limitative viene rappresentata analiticamente in serie trigonometrica della forma:

$$f(x) = \sum_0^\infty \{ a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \}, \tag{5}$$

ove a_n e b_n sono coefficienti costanti che risultano determinati dalle formole:

$$(6)\quad a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\,,\; a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\,,\; b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen} nx\,dx,$$

per tutti i valori di n.

Per giungere alla sua serie, Fourier osservò che se $f(x)$ è la somma della serie:

$$(7)\qquad \sum_0^\infty\{a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen} nx\},$$

uguagliandola a $f(x)$, e moltiplicando poi i due membri una volta per $\cos mx$ e un altra per $\operatorname{sen} mx$ e integrando fra $-\pi$ e π, si trova:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=\sum_0^\infty\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} nx\cos mx\,dx\right),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen} mx\,dx=\sum_0^\infty\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\operatorname{sen} nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} nx\operatorname{sen} mx\,dx\right),$$

e quindi, avendo riguardo ai valori noti degli integrali $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx$, $\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} nx\cos mx\,dx$, ..., pei diversi valori di interi m e n, ne dedusse che i cofficienti della serie (7) vengono determinati appunto dalle formole (6), e ne concluse allora senz'altro che la formola (5) ove a_n e b_n erano dati dalle (6), e che egli riscontrava giusta per funzioni particolari anche discontinue, serviva a rappresentare qualunque funzione data in una maniera del tutto arbitraria pei valori di x fra $-\pi$ e π.

4. Fourier presentò il 21 Dicembre 1807 alla Accademia delle Scienze di Parigi la memoria nella quale si trovano i risultati ora indicati; e questi risultati che Lagrange contestò nel modo il più formale, trovarono ben presto applicazioni meravigliose nella fisica matematica ove numerosi esempî persuadenti ne confermavano ogni dì più la esattezza.

Astrazion fatta però anche dalla obiezione che *ora* farebbesi al processo che condusse Fourier alla sua formola, per avere egli in questo processo applicata una integrazione per serie termine a termine senza dimostrare prima la legittimità di questa operazione, è certo che il processo stesso presenta un altro difetto capitale perchè ammette *a priori* la possibilità dello sviluppo della funzione data $f(x)$ sotto la forma (7), il che è quello appunto che trattavasi di dimostrare; talchè, anche dopo la memoria di Fourier, la questione della rappresentabilità di una funzione $f(x)$ data arbitrariamente fra $-\pi$ e π per mezzo di una serie trigonometrica della forma (7), restava ancora del tutto insoluta.

5. I risultati di Fourier però gettavano gran luce sulla questione, perchè non ostante le obiezioni ora indicate, il riscontrare che essi erano giusti nei singoli casi nei quali venivano applicati faceva acquistare la presunzione della loro esattezza, se non in generale, almeno in casi estesissimi. Conveniva perciò allora ammettere come data la forma della serie trigonometrica (7), e cercare in quali casi generali la serie stessa è convergente pei vari valori di x fra $-\pi$ e π e ha per somma la funzione data $f(x)$; e questa ricerca tentata prima dal Cauchy, fu fatta poi rigorosamente la prima volta da Dirichlet in una memoria pubblicata nel Vol. IV del Giornale di Crelle ai primi dell' anno 1829.

6. Dirichlet osservò dapprima che le serie della forma (7), o le altre:

$$(8)\qquad \frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty(a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen} nx),$$

ove:

$$(9)\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\;,\; b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen} nx\,dx\;,$$

non sono sempre convergenti indipendentemente dall' ordine dei termini; e quindi per decidere della loro convergenza non bisogna riferirsi al modo secondo cui tendono a zero questi termini, ma bisogna cercare il limite verso cui converge la somma dei primi n o $n+1$ di essi quando n cresce indefinitamente, e vedere se questo limite è o nò determinato e finito; e per dimostrare poi che questa serie ha per somma $f(x)$, almeno in dati casi, bisogna anche far vedere che il detto limite è appunto $f(x)$.

Dietro questa osservazione, la questione si riduceva a cercare il limite della somma dei primi n o $n+1$ termini della serie (8); e poichè la somma di questi $n+1$ termini, quando si pongano per le a_n e b_n i loro valori (9) e si muti x in α fuori dei segni integrali, può scriversi:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left\{\frac{1}{2}+\sum_1^n \cos n\,(x-\alpha)\right\} d\,x\,,$$

e per essere (*)

$$(10)\qquad \frac{1}{2}+\sum_1^n \cos n\,(x-\alpha)=\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x-\alpha)},$$

(*) La dimostrazione di questa formola si fà nel modo seguente. Si osserva che posto:

$$S=\sum_1^n \cos r\,\theta\,,$$

si ha:

$$2\,S\cos\theta=\sum_1^n 2\cos\theta\cos r\,\theta=\sum_1^n\{\cos(r+1)\,\theta+\cos(r-1)\,\theta\}=$$
$$=2\sum_1^n\cos r\,\theta+\cos(n+1)\,\theta-\cos n\,\theta+1-\cos\theta\,,$$

ovvero:

$$2\left(S+\frac{1}{2}\right)(1-\cos\theta)=2\operatorname{sen}\frac{2\,n+1}{2}\,\theta\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,,$$

da cui:

$$\frac{1}{2}+\sum_1^n\cos r\,\theta=\frac{\operatorname{sen}\frac{2\,n+1}{2}\theta}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\,.$$

si riduce all' integrale:

$$(11)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x-\alpha)}\,d\,x\,,$$

il problema venne così ridotto alla ricerca del limite di questo integrale per $n=\infty$; e cercando allora effettivamente questo limite, Dirichlet giunse a dimostrare rigorosamente che una funzione $f(x)$ di x che è data arbitrariamente fra $-\pi$ e π, e che in questo intervallo è sempre finita e non ha un numero infinito di massimi e minimi, per tutti i valori di x compresi fra gli stessi limiti pei quali è continua può rappresentarsi per mezzo della serie (8); e pei valori di x interni all' intervallo $(-\pi\,,\pi)$ pei quali la funzione stessa è discontinua (le discontinuità venendo allora ad essere discontinuità ordinarie) (*), la serie (8) dà il valore medio fra i due verso cui tende la funzione quando ci si avvicina indefinitamente a quel valore di x dalle due parti di esso; vale a dire se α è un punto interno all' intervallo ($-\pi$ e π) nel quale la funzione è continua o discontinua la somma della serie per $x=\alpha$ può sempre rappresentarsi con $\frac{1}{2}\{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)\}$; mentre pei punti estremi $\pm\pi$ la somma della serie è $\frac{1}{2}\{f(\pi+0)+f(\pi-0)\}$.

7. Dirichlet fece inoltre una estensione del suo teorema considerando anche alcune classi di funzioni che divenivano infinite in alcuni punti fra $-\pi$ e π, e che, avendo soltanto un numero finito di massimi e minimi, non potevano naturalmente essere infinite altro che in un numero finito di punti; e in fine della sua memoria aggiunse (senza però neppure accennare alla dimostrazione) che il teorema stesso sarebbe stato applicabile a tutte le funzioni, anche dotate di un numero

(*) V. per es. il mio libro *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* al §. 187. 6.° In ciò che segue le citazioni a questo libro saranno indicate col segno [m. l.].

infinito di massimi e minimi, per le quali gli integrali che compariscono nelle espressioni dei coefficienti a_n e b_n hanno un significato (nel senso inteso da lui); includendo così fra le funzioni rappresentabili per tutti i valori di x fra $-\pi$ e π mediante la serie (8) tutte le funzioni finite e continue.

Quest' ultima asserzione di Dirichlet è stata trovata ora inesatta dal sig. Du Bois-Reymond; però i lavori di Riemann, quelli di Lipschitz (negli ultimi dei quali l' asserzione di Dirichlet fu per la prima volta messa in dubbio), e quelli di Du Bois-Reymond e di altri hanno aggiunto alle funzioni con un numero finito di massimi e minimi per le quali Dirichlet dimostra rigorosamente il suo teorema altre classi estesissime di funzioni continue e discontinue con un numero infinito di massimi e minimi, al punto da potere asserire che, almeno nello stato attuale della scienza, finchè la si riguardi nelle sue applicazioni ai fenomeni naturali, la formola di Fourier è applicabile in casi anche ben al di là di quelli che occorre di considerare.

8. Noi esporremo i principali fra i risultati che sono stati ottenuti, per gli sviluppi in serie di Fourier e per altri; e per questo dovremo prendere a studiare gli integrali della forma $\int_0^b f(x)\frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x}\, d x$, $\int_a^b f(x)\frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x}\, d x$ con $0<a<b\leq\frac{\pi}{2}$ dai quali, come vedremo, vengono a dipendere gli integrali (11) che conducono alla somma della serie di Fourier (8), e dovremo studiarne anche altri più generali; però, onde procedere con ordine, noi premetteremo alcuni teoremi sugli integrali della forma $\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx$, che, potendo essere utili anche in altre teorie, saranno da noi esposti con maggiore generalità di quella che quì sarebbe necessaria, e ne esporremo alcuni sugli integrali $\int_0^b \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x} d x$, $\int_a^b \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x}\, d x$ cui si riducono i precedenti nel caso particolare di $f(x)=1$.