MATEMATICHE COMPLEMENTARI
ESERCIZI 2017
FOGLIO N. 2

(1) Sia H uno spazio di Hilbert reale con prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$. Siano $x_1, \dots, x_N$ elementi linearmente indipendenti di H. Provare che la matrice $N \times N$
$$\{(x_i, x_j)\}_{i,j=1}^N$$
è invertibile.

(2) Sia $\mathcal{R}$ lo spazio delle funzioni integrabili secondo Riemann sull'intervallo $[0, 1]$ con il prodotto scalare
$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \ .$$
Sia S il sottospazio vettoriale di $\mathcal{R}$ generato dalle funzioni $1, x, x^2$. Stabilire come si determina l'operatore di proiezione ortogonale
$$P_S : \mathcal{R} \mapsto S \ .$$

(3) Sia
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \ , \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \ . \end{cases}$$
Scrivere la serie di Fourier di f e calcolare la corrispondente identitá di Parseval.