ESERCIZI E PROBLEMI - SETTIMANE 1, 2 : SOLUZIONI

1. (1) Riportare la tabella con i risultati delle misure
2. (1) D : 603 cm^2
3. (2) B : 0,159 mm
4. (3) Relazione incognita tra:

$\begin{cases} \text{periodo } \tau \text{ di un oscillatore "non lineare"} : [\tau] = [T] \\ \text{le altre grandezze fisiche che caratterizzano l'oscillatore} : \end{cases}$

$$\begin{cases} \text{massa } m & [m] = [M] \\ \text{costante elastica } k & [k] = [ML^{-2}T^{-2}] \\ \text{ampiezza } A & [A] = [L] \end{cases}$$

NB: Nel caso più conosciuto, quello dell'oscillatore "lineare", la forza elastica di richiamo è proporzionale allo spostamento, per cui la costante elastica di solito usata ha dimensioni $[k] = [MT^{-2}]$. In questo caso si ipotizza una forza proporzionale al cubo dello spostamento: $|F| = k|x^3| \Rightarrow [k] = [MLT^{-2}L^{-3}]$

Scriviamo la relazione incognita nella forma:

$$\tau = c\, A^x m^y k^z$$

con x, y, z esponenti incogniti da determinare

c : costante adimensionale di proporzionalità

$[c] = [1]$

per il criterio di omogeneità dimensionale:
condizione necessaria:

$$[\tau] = [A^x m^y k^z]$$

scrivendo per esteso le dimensioni delle grandezze fisiche, nel S.I.:

$$[M^0 L^0 T^1] = [L^x M^y M^z L^{-2z} T^{-2z}] = [M^{y+z} L^{x-2z} T^{-2z}]$$

eguagliando gli esponenti, cioè le "dimensioni":

$$\left.\begin{array}{ll} \text{massa:} & \left\{ \begin{array}{lcl} y+z=0 & \Rightarrow & y=-z=+\frac{1}{2} \\ x-2z=0 & \Rightarrow & x=2z=-1 \\ -2z=1 & \Rightarrow & z=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ \text{lunghezza:} & \\ \text{tempo:} & \end{array}\right\} A^{-1} m^{1/2} k^{-1/2}$$

da cui si deduce che la risposta corretta è (C):

τ dev'essere proporzionale a: $A^{-1}\sqrt{m/k}$

PROBLEMA 5 (2) Prefissi del SI.

(a) $\dfrac{10 \text{ keuro}}{52 \text{ settimane}} = 190$ euro/settimana

(b) $\dfrac{10 \text{ Meuro}}{(20\times 12)\text{ mesi}} = \dfrac{10\times 10^6 \text{ euro}}{240 \text{ mesi}} = 42$ keuro/mese

(c) 30 gigabyte $= 30 \times 1024 \times 1024 \times 1024 = 32\,212\,254\,720$ byte

---

PROBLEMA 6 (10)

0,001 s in 100 anni = 1 secolo

0,020 s in 20 secoli

PROBLEMA 7 (21)

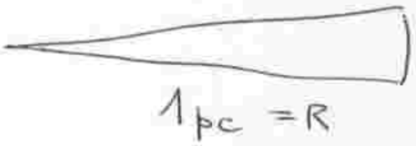
distanza terra-Sole : 1 UA $= 1.50 \times 10^8$ km

Conversioni UA $\leftrightarrow$ pc e UA $\leftrightarrow$ anni-luce :

$$1 \text{ anno-luce} = (365{,}25 \times 24 \times 3600)\,\text{s} \times (3.00\times 10^5)\,\text{km/s} =$$
$$= 9.47 \times 10^{12}\ \text{km} =$$
$$= \frac{9.47\times 10^{12}\ \text{km}}{1{,}50\times 10^8\ \text{km/UA}} = 6.31\times 10^4\ \text{UA}$$

(a) $\Rightarrow$ $1\ \text{UA} = \dfrac{1}{6.31\times 10^4}$ anni-luce $= 1.58 \times 10^{-5}$ anni-luce

distanza Terra-Sole



$\frac{\ell}{R} = \theta$ in radianti

$$\theta = 1'' = \frac{2\pi}{360 \times 60 \times 60} \text{ rad}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \text{ pc} = 1\text{UA}/\theta = 1\text{UA} \times \frac{1.296 \times 10^6}{2\pi} =$$

$$= 0.206 \times 10^6 \text{ UA} =$$

$$= 0.309 \times 10^{14} \text{ km} =$$

$$= \frac{0.309 \times 10^{14} \text{ km}}{9.47 \times 10^{12} \text{ km/anno luce}} = 3.26 \text{ anni-luce}$$

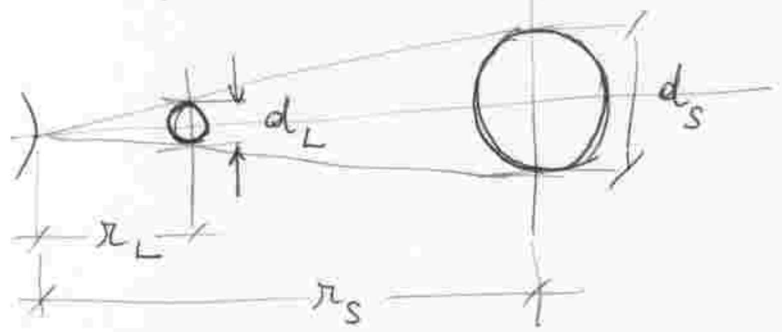
(a) $\Rightarrow$ distanza terra - Sole :

$$1 \text{ UA} = \frac{1 \text{ UA}}{0.206 \times 10^6 \text{ UA/pc}} = 4.85 \times 10^{-6} \text{ pc}$$

(b) 1 anno-luce $= 9.47 \times 10^{12}$ km

1 pc $= 3.09 \times 10^{13}$ km

PROBLEMA 8 (2)



d_S , d_L : diametri

r_S , r_L : distanze dalla Terra

(a) $$\frac{d_S}{d_L} = \frac{r_S}{r_L} = 390 = \frac{d_S/2}{d_L/2}$$

(b) $$\left.\begin{aligned} V_S &= \frac{4}{3}\pi\left(d_S/2\right)^3 \\ V_L &= \frac{4}{3}\pi\left(d_L/2\right)^3 \end{aligned}\right\} \quad \frac{V_S}{V_L} = \left(\frac{d_S}{d_L}\right)^3 = 5.93 \times 10^7$$

(c) $d_L = r_L \cdot \theta$, con θ espresso in radianti

$$d_L = 3.82 \times 10^5 \text{ km} \times 0.52^\circ \frac{2\pi}{360^\circ} =$$

$$= 3.5 \times 10^3 \text{ km}$$

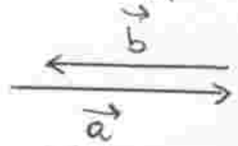
PROBLEMA 9 (10)

(a) $S = 8{,}43 \text{ cm} \times 5{,}12 \text{ cm} = 43.2 \text{ cm}^2$

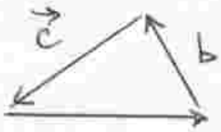
(b) $S = \pi \times (3.7 \text{ cm})^2 = 43 \text{ cm}^2$

PROBLEMA 10 (1, seconda pagina)

La somma di 2 vettori di modulo differente non può essere un vettore nullo; invece la somma di 3 vettori di modulo differente può esserlo.



$\vec{a} + \vec{b} \neq 0$



$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

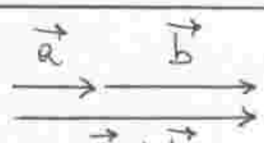
PROBLEMA 11 (2)

Un vettore con componenti non nulle non può avere modulo nullo:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$v_x, v_y, v_z \neq 0 \implies |\vec{v}| > 0$$

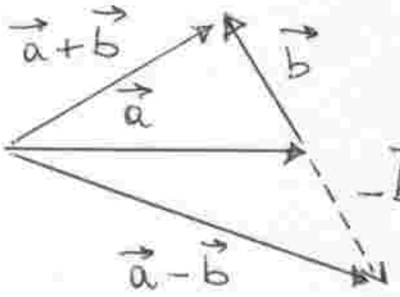
PROBLEMA 12 (3) : Sì, infatti



Se due vettori sono paralleli e concordi

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

PROBLEMA 13 (4)



esempio in cui:

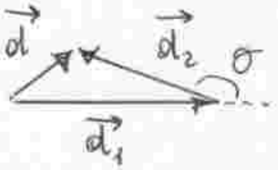
$$|\vec{a}-\vec{b}| > |\vec{a}|$$

$$|\vec{a}-\vec{b}| > |\vec{a}+\vec{b}|$$

PROBLEMA 14 (5)

$$\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 \overset{?}{\Longrightarrow} |\vec{d}| > |\vec{d}_1| \text{ oppure } |\vec{d}| > |\vec{d}_2| \ ?$$

no: contro-esempio:



in questo caso: $|\vec{d}| < |\vec{d}_1|$ e $|\vec{d}| < |\vec{d}_2|$

in equazioni:

$$\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 \quad \longrightarrow \quad |\vec{d}|^2 = \vec{d}\cdot\vec{d} = (\vec{d}_1+\vec{d}_2)\cdot(\vec{d}_1+\vec{d}_2) =$$

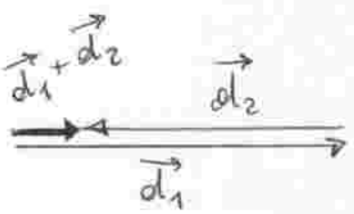
$$= \vec{d}_1\cdot\vec{d}_1 + \vec{d}_2\cdot\vec{d}_2 + 2\,\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2 =$$

$$= |\vec{d}_1|^2 + |\vec{d}_2|^2 + 2|\vec{d}_1||\vec{d}_2|\cos\theta$$

per $\theta > \pi/2$: $\cos\theta < 0 \Rightarrow |\vec{d}|^2 < |\vec{d}_1|^2 + |\vec{d}_2|^2$

p. es., se in particolare $\theta = \pi \Rightarrow \cos\theta = -1$

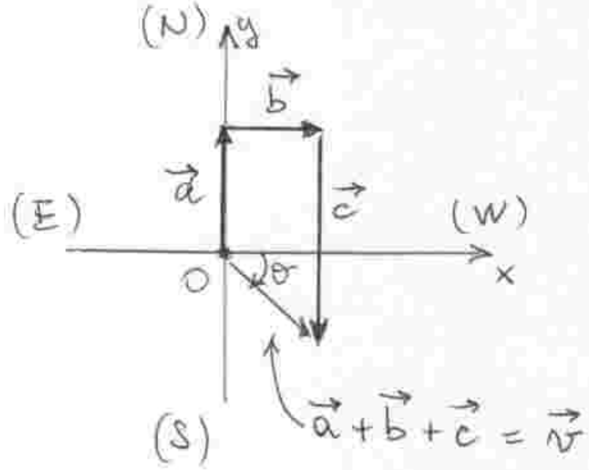
$$|\vec{d}| = \sqrt{|\vec{d}_1|^2 + |\vec{d}_2|^2 - 2|\vec{d}_1|\cdot|\vec{d}_2|} = \big||\vec{d}_1| - |\vec{d}_2|\big|$$



Con una scelta opportuna di $|\vec{d}_1|$ e $|\vec{d}_2|$ il modulo del vettore somma può essere minore di entrambi i moduli.

$$= \sqrt{(|\vec{d}_1| - |\vec{d}_2|)^2} = \big||\vec{d}_1| - |\vec{d}_2|\big|$$

PROBLEMA 15 (2)



(unità di misura: km, sottinteso)

$\vec{a} = 3.1\,\hat{j}$

$\vec{b} = 2.4\,\hat{i}$

$\vec{c} = -5.2\,\hat{j}$

$$\vec{v} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 2.4\,\hat{i} + (3.1-5.2)\,\hat{j} = 2.4\,\hat{i} - 2.1\,\hat{j}$$

distanza in linea d'aria tra partenza e arrivo:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{2.4^2 + 2.1^2} = 3.2 \text{ km}$$

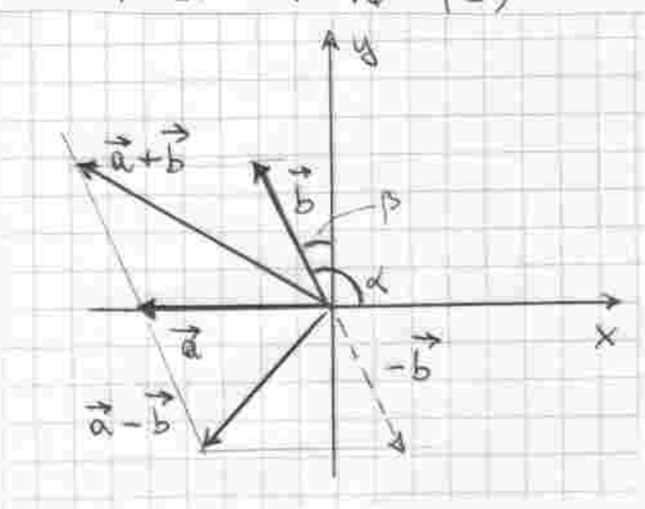
direzione: angolo θ rispetto all'asse x:

$$\operatorname{arctg}\frac{v_y}{v_x} = \theta = \tan^{-1}\left(-\frac{2.1}{2.4}\right) = -0.72 \text{ rad} =$$

$$= -0.72 \times \frac{360°}{2\pi} = -41°$$

rispetto alla direzione N lo spostamento è avvenuto in direzione $90° + 41° = 131°$ SW

PROBLEMA 16 (3)



$\vec{a} = -5.2\,\hat{i}$

$\vec{b} = b\cos\alpha\,\hat{i} + b\cos\beta\,\hat{j}$

dove: $b = 4.3$

$$\begin{cases}\alpha = 90° + 35° = 125° \\ \cos\alpha = -0.57\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta = 35° \\ \cos\beta = 0.82\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \vec{b} = -2.5\,\hat{i} + 3.5\,\hat{j}$$

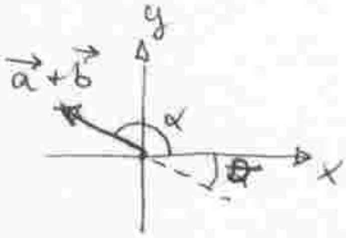
(a) $\vec{a} + \vec{b} = (-5.2 - 2.5)\hat{i} + 3.5\,\hat{j} =$

$= -7.7\,\hat{i} + 3.5\,\hat{j}$

$\vec{a} - \vec{b} = (-5.2 + 2.5)\hat{i} - 3.5\,\hat{j} =$

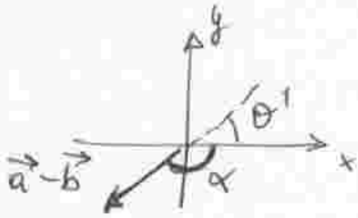
$= -2.7\,\hat{i} - 3.5\,\hat{j}$

$$\begin{cases} |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7.7^2 + 3.5^2} = 8.5 \\ \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{3.5}{-7.7}\right) = -0.427 = -24^\circ \end{cases}$$



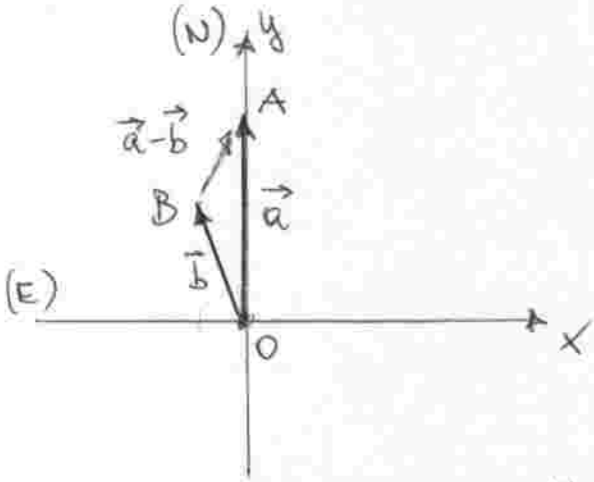
$\Longrightarrow \alpha = 180^\circ - 24^\circ = 156^\circ$

$$\begin{cases} |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2.7^2 + 3.5^2} = 4.4 \\ \theta' = \tan^{-1}\left(\dfrac{3.5}{2.7}\right) = 0.914 = 52^\circ \end{cases}$$



$\Longrightarrow |\alpha| = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$

PROBLEMA 17 (6)



unità in km, sottintese nei calcoli intermedi

$OA = \vec{a} = 124\,\hat{j}$

$OB = \vec{b} = -31.4\,\hat{i} + 72.6\,\hat{j}$

$OB + BA = OA$

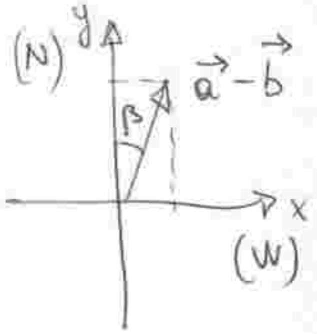
$BA = OA - OB = \vec{a} - \vec{b}$

il vettore $BA = \vec{a} - \vec{b} = 31.4\,\hat{i} + (124 - 72.6)\,\hat{j} =$

$= 31.4\,\hat{i} + 51.4\,\hat{j}$

rappresenta il percorso che rimane da compiere

distanza: $|BA| = |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{31.4^2 + 51.4^2} = 60.2$ km



direzione, rispetto a quella N (versore $\hat{j}$):

$$\beta = \arccos\left(\frac{(\vec{a}-\vec{b})\cdot\hat{j}}{|\vec{a}-\vec{b}|}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{51.4}{60.2}\right) = \underset{0.548}{0.55}\ \text{rad} = 31°$$

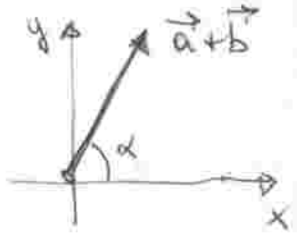
rispetto alla direzione N, la rotta dovrà essere 31° W

PROBLEMA 18 (7)

$\vec{a} = 5\hat{i} + 3\hat{j}$

$\vec{b} = -3\hat{i} + 2\hat{j}$

$$\vec{a}+\vec{b} = 2\hat{i} + 5\hat{j}$$



$$\begin{cases} |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29} = \underset{\text{modulo}}{5.4} \\ \alpha = \text{atan}\left(\frac{5}{2}\right) = \underset{\text{rad}}{1.19} = \underset{\text{direzione}}{68°} \end{cases}$$

verso: 1° quadrante, vedi figura.

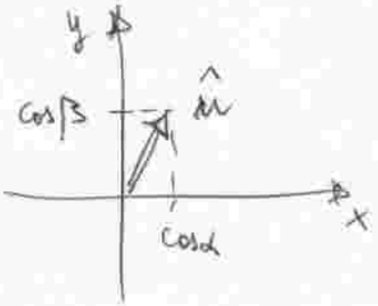
in altri termini: la direzione orientata è determinata dai "coseni direttori":

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{a}+\vec{b})_x}{|\vec{a}+\vec{b}|} = \frac{2}{5.4} = 0.37$$

$$\cos\beta = \frac{(\vec{a}+\vec{b})_y}{|\vec{a}+\vec{b}|} = \frac{5}{5.4} = 0.92$$

interpretabili come componenti del versore (vettore unitario) che indica la direzione orientata di $\vec{a}+\vec{b}$

$$\hat{u} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}$$

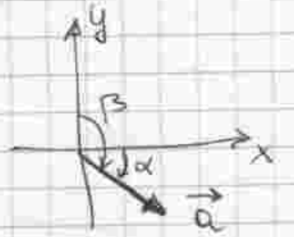


PROBLEMA 19 (9)

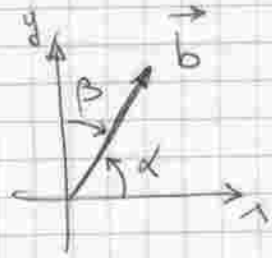
$\vec{a} = 4.0\,\hat{i} - 3.0\,\hat{j}$

$\vec{b} = 6.0\,\hat{i} + 8.0\,\hat{j}$

per individuare le direzioni, usiamo i coseni direttori ed i corrispondenti angoli con le direzioni orientate $\hat{i}$ e $\hat{j}$ degli assi cartesiani x e y.

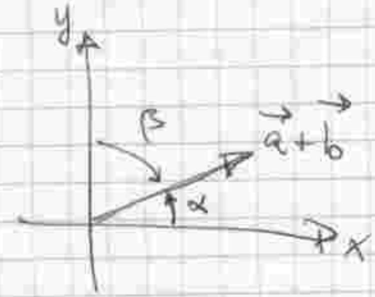


$$\begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{4.0^2 + 3.0^2} = 5.0 \\ \cos\alpha = \dfrac{4.0}{5.0} = 0.80 \implies \alpha = 0.643 \text{ rad} = \\ \qquad = 37° \\ \cos\beta = \dfrac{-3.0}{5.0} = -0.60 \implies \beta = 2.21 \text{ rad} = \\ \qquad = 127° \end{cases}$$



$$\begin{cases} |\vec{b}| = \sqrt{6.0^2 + 8.0^2} = 10.0 \\ \cos\alpha = \dfrac{6.0}{10.0} = 0.60 \implies \alpha = 0.927 \text{ rad} = \\ \qquad = 53° \\ \cos\beta = \dfrac{8.0}{10.0} = 0.80 \implies \beta = 0.643 \text{ rad} = \\ \qquad = 37° \end{cases}$$

$\vec{a} + \vec{b} = 10.0\,\hat{i} + 5.0\,\hat{j}$



$$\begin{cases} |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10.0^2 + 5.0^2} = 11.2 \\ \cos\alpha = \dfrac{10.0}{11.2} = 0.893 \implies \alpha = \ldots \\ \cos\beta = \dfrac{5.0}{11.2} = 0.446 \implies \beta = \ldots \end{cases}$$

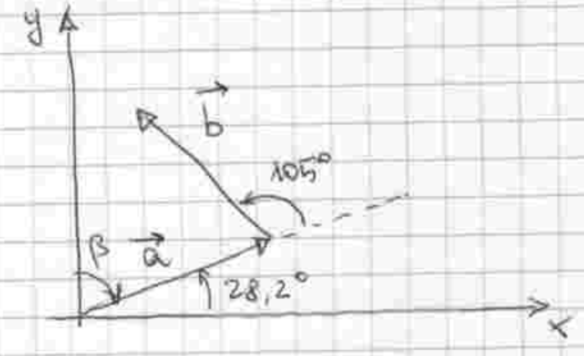
$\vec{a} - \vec{b} = -2.0\,\hat{i} - 11.0\,\hat{j}$

$$\begin{cases} |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2.0^2 + 11.0^2} = 11.2 \\ \cos\alpha = -\dfrac{2.0}{11.2} = \ldots \\ \cos\beta = -\dfrac{11}{11.2} = \ldots \end{cases}$$

$\vec{b} - \vec{a} = 2.0\,\hat{i} + 11.0\,\hat{j}$

$$\begin{cases} |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{2.0^2 + 11.0^2} = \ldots \\ \cos\alpha = \ldots \\ \cos\beta = \ldots \end{cases}$$

PROBLEMA 20 (10)



$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 12,7$

$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{a} : \alpha = 28.2° \qquad \beta = 90° - 28.2°$

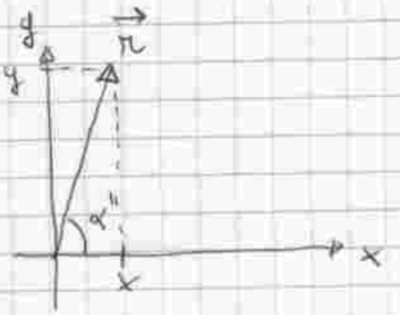
$\vec{b} : \alpha' = 28.2° + 105° = 133.2°$

$$\begin{cases} a_x = \vec{a} \cdot \hat{i} = a \cos\alpha = 12.7 \times 0.881 = 11.2 \\ a_y = \vec{a} \cdot \hat{j} = a \cos\beta = 12.7 \times 0.473 = 6.0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_x = \vec{b} \cdot \hat{i} = b \cos\alpha' = 12.7 \times (-0.685) = -8.7 \\ b_y = \vec{b} \cdot \hat{j} = b \cos\beta' = 12.7 \times 0.729 = 9.3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha' = 133.2° \\ \beta' = \alpha' - 90° = 133.2° - 90° = \\ = 43.2° \end{cases}$$

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \quad \begin{cases} x = a_x + b_x = 2.5 \\ y = a_y + b_y = 15.3 \end{cases}$$



$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 15.5$

$\alpha'' = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{atan} \cancel{\frac{2.5}{15.3}} \; \frac{15.3}{2.5}$

$= \cancel{0.162}\; 1.409 \text{ rad} = 80.7°$