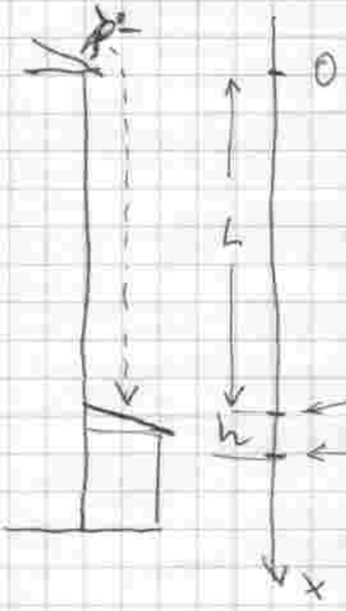
ESERCIZI E PROBLEMI - SETTIMANE 3, 4 - SOLUZIONI

PROBLEMA 1



$0 \quad t_0 = 0 \; : \; x(0) = 0 \; , \; v_x(0) = 0$

$$\begin{cases} L = 43 \text{ m} \\ h = 1.0 \text{ m} \\ g = 9.8 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

$t = t_1 \qquad x(t_1) = L \; ; \; v_x(t_1) = ? \;\; t_1 = ?$

$t = t_2 \qquad x(t_2) = L + h \; , \; v_x(t_2) = 0 \; ; \; t_2 = ? \;\; a = ?$

Dall' istante t_0 all' istante t_1 (incognito) : accelerazione costante $g > 0$

Dall' istante t_1 (incognito) all' istante t_2 (incognito) : accelerazione costante $a < 0$

Sono note le posizioni $x(t_1) = L$
$x(t_2) = L + h$

a) essendo g costante, tra i due istanti t_0 e t_1 :

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_0) + v_x(t_0)(t_1 - t_0) + \frac{1}{2} g (t_1 - t_0)^2 \\ v_x(t_1) = v_x(t_0) + g(t_1 - t_0) \end{cases}$$

sostituendo $t_0 = 0$, otteniamo:

$$x(t_1) = \frac{1}{2} g t_1^2 = L \implies t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}$$

istante in cui il corpo entra a contatto con la tettoia deformabile

$$\implies v_x(t_1) = g t_1 = \sqrt{2Lg}$$

b) analogamente : nel secondo intervallo di tempo da t_1 a t_2 :

$$\begin{cases} x(t_2) = x(t_1) + v_x(t_1)(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a (t_2 - t_1)^2 = L + h & (1) \\ v_x(t_2) = v_x(t_1) + a(t_2 - t_1) = 0 & (2) \end{cases}$$

dove si è fatto uso dei dati, cioè accel. costante a ed arresto dopo percorso (deformazione della tettoia) h

da cui sostituendo quanto trovato per t_1 e $v_x(t_1)$:

$$\begin{cases} L + \sqrt{2Lg}\left(t_2 - \sqrt{\frac{2L}{g}}\right) + \frac{1}{2}a\left(t_2 - \sqrt{\frac{2L}{g}}\right)^2 = L + h & (1) \\ \sqrt{2Lg} + a t_2 - a\sqrt{\frac{2L}{g}} = 0 & (2) \end{cases}$$

dalla (2) si ricava l'istante di arresto t_2:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2L}{g}} - \frac{1}{a}\sqrt{2Lg}$$

sostituendo nella (1) determino l'accelerazione incognita a, supposta costante:

$$L + \sqrt{2Lg}\left(-\frac{1}{a}\sqrt{2Lg}\right) + \frac{1}{2}a\left(-\frac{1}{a}\sqrt{2Lg}\right)^2 = L + h$$

$$\cancel{L} - \frac{2Lg}{2a} = \cancel{L} + h$$

$$\boxed{a = -\frac{L}{h}\,g < 0}$$

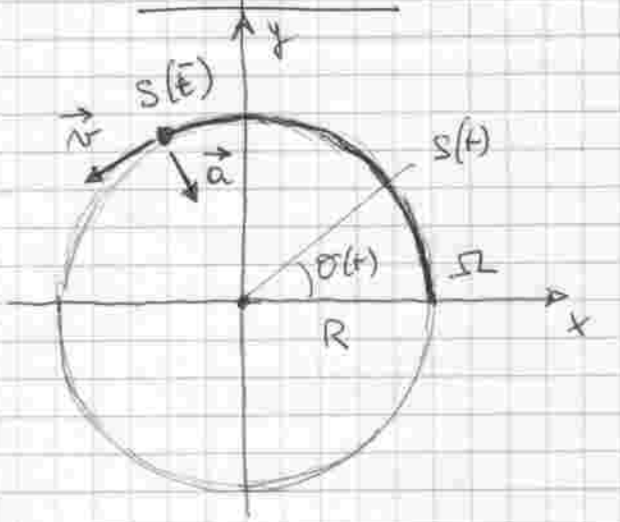
questo risultato è intuitivo, e può essere ottenuto molto più rapidamente utilizzando lavoro ed energia, come si vedrà in seguito. L'accelerazione a è negativa ed è tanto maggiore in valore assoluto quanto minore è lo spazio d'arresto h.

Sostituendo si trova anche: $\boxed{t_2 = t_1 + \sqrt{\frac{2h^2}{Lg}}}$

Risultati numerici:

$$a = -\frac{43}{1.0}\,g = -43\,g = -420\ m/s^2$$

PROBLEMA 2



1) $R = 50\ m$

legge oraria:

$$s(t) = k_1 t \quad , \quad k_1 = 10\ m/s$$

(b) calcoliamo posizione, velocità e accelerazione in rappresentazione intrinseca all'istante $\bar{t} = 10\ s$

posizione: $s(\bar{t}) = k_1 \bar{t} =$

$= 100\ m$

lungo la circonferenza a partire da Ω (vedi figura)

velocità: velocità scalare costante $v_s = \dfrac{ds}{dt} = k_1 = 10\ m/s$

direzione e verso: tangente alla circonferenza

$$\vec{v} = v_s \hat{u}_t \quad , \hat{u}_t \text{ versore tangente}$$

(vedi figura)

accelerazione: $\vec{a} = a_t \hat{u}_t + a_n \hat{u}_n =$

$$= \frac{dv_s}{dt}\hat{u}_t + \frac{v_s^2}{R}\hat{u}_n =$$

$$= \cancel{0\,\hat{u}_t} + \frac{k_1^2}{R}\hat{u}_n$$ accelerazione solo centripeta

$$a_n = \text{cost.} = \frac{k_1^2}{R} = \frac{100}{50} = 2.0\ m/s^2$$

(a) In coordinate cartesiane:

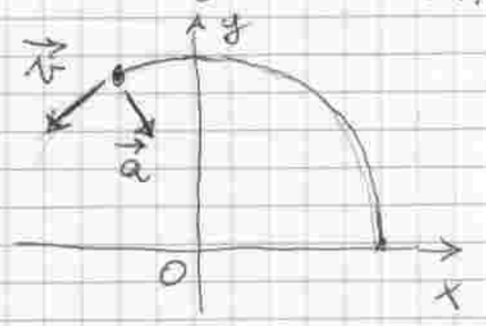
ricordando che $\theta(t) = \dfrac{s(t)}{R}$ angolo al centro

si trovano subito le equazioni parametriche:

posizione $\begin{cases} x(t) = R\cos\left(\dfrac{k_1}{R}t\right) \\ y(t) = R\sin\left(\dfrac{k_1}{R}t\right) \end{cases}$

per $t = \bar{t} = 10\,s$ si ottiene, sostituendo i valori numerici:

$$\begin{cases} x(\bar{t}) = 50 \cos(2.0) = -20.8 \text{ m} \\ y(\bar{t}) = 50 \sin(2.0) = 45.5 \text{ m} \end{cases}$$



compatibile con il risultato intrinseco per la posizione

velocità:

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = -k_1 \sin\left(\dfrac{k_1}{R} t\right) \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt} = k_1 \cos\left(\dfrac{k_1}{R} t\right) \end{cases}$$

si verifica facilmente che modulo, direzione e verso sono compatibili con quelli già trovati:
in particolare $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = k_1$

all'istante $t = \bar{t} = 10\,s$

$$\begin{cases} v_x(\bar{t}) = -10 \sin(2.0) = -9.1 \text{ m/s} \\ v_y(\bar{t}) = 10 \cos(2.0) = -4.2 \text{ m/s} \end{cases}$$

accelerazione:

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{k_1^2}{R} \cos\left(\dfrac{k_1}{R} t\right) \\ a_y(t) = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dv_y}{dt} = -\dfrac{k_1^2}{R} \sin\left(\dfrac{k_1}{R} t\right) \end{cases}$$

si verifica che modulo, direzione e verso sono compatibili con quelli già trovati:

$$a = |\vec{a}| = \frac{k_1^2}{R} = a_n$$

per $t = \bar{t} = 10\,s$

$$\begin{cases} a_x(\bar{t}) = -2.0 \cos(2.0) = +0.83 \text{ m/s}^2 \\ a_y(\bar{t}) = -2.0 \sin(2.0) = -1.82 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

analogamente, nel caso di moto con legge oraria:

$$s(t) = k_2 t^2 \quad , \; k_2 = 1{,}0 \ m/s^2$$

si trova (diamo qui solo le equazioni, senza il calcolo numerico per $t = \bar{t}$)

(b) rappresentazione intrinseca:

posizione: $s(t) = k_2 t^2$

velocità: $v_s(t) = \frac{ds}{dt} = 2 k_2 t$; $\vec{v}(t) = v_s(t) \hat{u}_t$

accelerazione:

tangenziale: $a_t(t) = \frac{dv_s}{dt} = 2 k_2 = 2{,}0 \, m/s^2$

centripeta: $a_n(t) = \frac{v_s^2}{R} = \frac{4 k_2^2}{R} t^2$

(a) rappresentazione cartesiana: da $\theta(t) = \frac{s(t)}{R} = \frac{k_2 t^2}{R}$

posizione:

$$\begin{cases} x(t) = R \cos\left(\frac{k_2}{R} t^2\right) \\ y(t) = R \sin\left(\frac{k_2}{R} t^2\right) \end{cases}$$

velocità:

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -2 \frac{k_2 t}{\cancel{R}} \cancel{R} \sin\left(\frac{k_2}{R} t^2\right) = -2 k_2 t \cdot \sin\left(\frac{k_2}{R} t^2\right) \\ v_y(t) = \frac{dy}{dt} = 2 k_2 t \cos\left(\frac{k_2}{R} t^2\right) \end{cases}$$

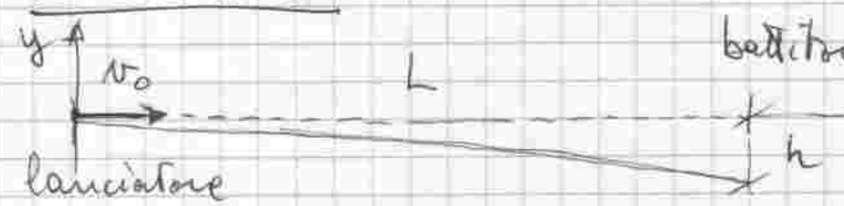
(si verifica che: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |2 k_2 t| = |v_s|$ come previsto)

accelerazione:

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -2 k_2 t \cdot \cos\left(\frac{k_2}{R} t^2\right) \cdot 2 \frac{k_2}{R} t^2 - 2 k_2 \sin\left(\frac{k_2}{R} t^2\right) \\ \qquad = -2 k_2 \sin\left(\frac{k_2}{R} t^2\right) - 4 \frac{k_2^2 t^2}{R} \cos\left(\frac{k_2 t^2}{R}\right) \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = 2 k_2 \cos\left(\frac{k_2}{R} t^2\right) - \frac{4 k^2 t^2}{R} \sin\left(\frac{k_2 t^2}{R}\right) \end{cases}$$

Nell'espressione delle componenti cartesiane dell'accelerazione si possono riconoscere due termini, ciascuno corrispondente rispettivamente ad un vettore di modulo $2k_2$, cioè l'accelerazione tangenziale, ed un vettore di modulo $\frac{4k^2t^2}{R}$, cioè l'accelerazione centripeta.

PROBLEMA 3



$L = 18\ m$
$v_0 = 40\ m/s$
$g = 9.8\ m/s^2$

(a) equazioni della traiettoria, in componenti cartesiane: moto uniforme lungo la proiezione x, accelerato ($-g$) lungo la proiezione y

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$ (se l'asse y è orientato verso l'alto)

troviamo l'istante t_1 al quale la pallina raggiunge il battitore, situato ad $x = L$:

$$x(t_1) = v_0 t_1 = L \implies t_1 = \frac{L}{v_0}$$

la corrispondente coordinata y è:

$$y(t_1) = -\frac{1}{2} g t_1^2 = -\frac{1}{2} g \frac{L^2}{v_0^2} = -\frac{1}{2} \frac{gL^2}{v_0^2}$$

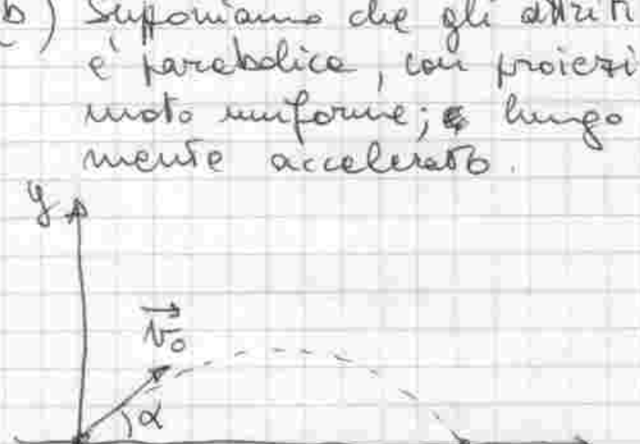
Controllo dimensionale: $[y] = \left[\frac{gL^2}{v_0^2}\right] = \left[\frac{LT^{-2}L^2}{L^2T^{-2}}\right] = [L]$

OK.

Sostituendo i valori numerici:

$$y(t_1) = -\frac{1}{2} \frac{9.8 \cdot 18^2}{40^2} = 0.99\ m$$

(b) Supponiamo che gli attriti siano trascurabili: la traiettoria è parabolica, con proiezioni: lungo l'asse orizzontale: moto uniforme; lungo l'asse verticale: moto uniformemente accelerato.



legge oraria del moto, in componenti cartesiane:

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t & (1) \\ y(t) = (v_0 \sin\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 & (2) \end{cases}$$

per semplicità: $\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ y(t=0) = 0 \end{cases}$ posizione iniziale: origine O

La massima gittata L si può ottenere studiando l'equazione della traiettoria nel piano (x, y).
Eliminando la variabile temporale t dalle equazioni parametriche (1), (2) si ottiene la coordinata y in funzione di x: $\quad (1) \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

$$y(x) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\, x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x^2$$

Le coordinate x_1 ed x_2 dei punti di partenza e di arrivo corrispondono alla condizione $y = 0$

$$y = 0 \iff x\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}\, x\right) = 0$$

$$\text{2 soluzioni: } \begin{cases} x_1 = 0 & \text{punto di partenza} \\ x_2 = \dfrac{v_0^2}{g}\, 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha = L \end{cases}$$

$L = x_2 - x_1 = x_2$ è la distanza tra il punto di partenza ed il punto d'arrivo cioè la gittata.

controllo dimensionale: $\left[\frac{v_0^2}{g}\right] = \left[L^2 T^{-2} L^{-1} T^2\right] = [L]$

OK.

la gittata L è massima quando:

$$\sin 2\alpha = 1$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$$

PROBLEMA 4. (n. 4.13)

$$t=0: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$t=0: \begin{cases} v_x = v_0 = 10 \text{ m/s} \\ v_y = 0 \end{cases}$$

Introduciamo il sistema di riferimento (Oxy) indicato in figura, con asse x orizzontale ed asse y verticale (verso l'alto). La posizione iniziale coincide con l'origine O. Trascurando gli attriti, agisce solo la forza di gravità diretta verso il basso $\Rightarrow \vec{F}_{tot} = -mg\,\hat{j}$

II principio: $\vec{F}_{tot} = m\vec{a}$

proiezioni su x, y: $\begin{cases} 0 = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ -mg = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \end{cases}$ equazioni differenziali del moto

Condizioni iniziali: $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} v_x(0) = v_0 \\ v_y(0) = 0 \end{cases}$

da cui si ottiene l'equazione della traiettoria, integrando:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t & (1) \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 & (2) \end{cases}$$

Il bersaglio viene raggiunto in Q all'istante $t_1 = 0.19$ s

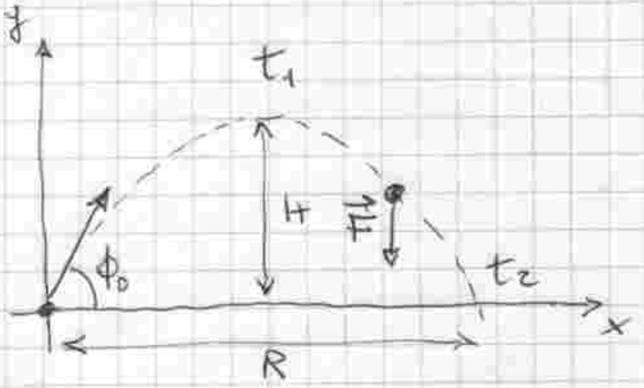
(a) La distanza PQ è data quindi, per la (2), da:

$$|PQ| = |y(t_1)| = \frac{1}{2} g t_1^2 = 0{,}5 \times 9.8 \times (0.19)^2 = 0.18 \text{ m} = 18 \text{ cm}$$

(b) La distanza del bersaglio dal lanciatore è:

$$|OP| = |x(t_1)| = v_0 t_1 = 10 \times 0.19 = 1.9 \text{ m}$$

PROBLEMA 5 (n. 4.21)



Introduciamo il sistema di riferimento Oxy.

condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} v_x(0) &= v_0 \cos\phi_0 \\ v_y(0) &= v_0 \sin\phi_0 \end{aligned}$$

anche in questo caso: con le condizioni iniziali date, dal II principio:

$$\begin{cases} 0 = m \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ -mg = m \dfrac{d^2y}{dt^2} \end{cases}$$

si ottengono le equazioni parametriche della traiettoria:

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\phi_0)\cdot t & (1) \\ y(t) = (v_0 \sin\phi_0)\cdot t - \frac{1}{2} g t^2 & (2) \end{cases}$$

velocità istantanea

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\phi_0 = \text{cost.} \\ v_y(t) = v_0 \sin\phi_0 - g t \end{cases}$$

La massima altezza H viene raggiunta quando si annulla la componente v_y della velocità, cioè all'istante t_1

$$v_0 \sin\phi_0 - g t_1 = 0 \iff t_1 = \frac{v_0 \sin\phi_0}{g}$$

da cui si ottiene:

$$H = y(t_1) = \frac{v_0^2 \sin^2\phi_0}{g} - \frac{1}{2} \cancel{g} \frac{v_0^2 \sin^2\phi_0}{g^{\cancel{2}}} = \frac{v_0^2 \sin^2\phi_0}{2g}$$

Abbiamo già ottenuto in un problema precedente la gittata in funzione dell'angolo di lancio:

$$R = x(t_2) = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin\phi_0 \cos\phi_0$$

(a) da cui si ottiene:

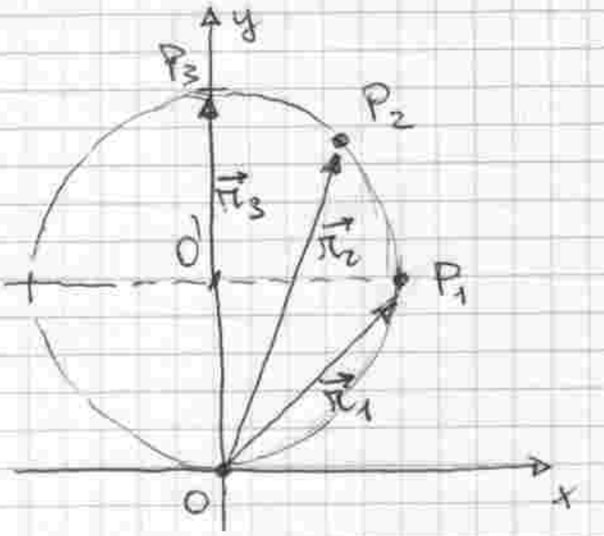
$$\frac{H}{R} = \frac{\cancel{v_0^2} \sin^{\cancel{2}}\phi_0}{2\cancel{g}} \cdot \frac{\cancel{g}}{2 \cancel{v_0^2} \cancel{\sin\phi_0} \cos\phi_0} = \frac{1}{4} \tan\phi_0$$

(b)

$$H = R \iff \frac{H}{R} = 1 = \frac{1}{4} \tan\phi_0 \iff \tan\phi_0 = 4$$

$$\phi_0 = 1{,}33 \text{ rad} = 76^\circ$$

PROBLEMA 6 (n. 4.58)



raggio $R = 3.0$ m

un giro completo a velocità scalare costante : periodo $T = 20$ s

altri istanti considerati :

$t_1 = 5.0$ s $\Rightarrow \vec{r}_1 = OP_1$

$t_2 = 7.5$ s $\Rightarrow \vec{r}_2 = OP_2$

$t_3 = 10.$ s $\Rightarrow \vec{r}_3 = OP_3$

(a) Essendo costante la velocità scalare, si individuano facilmente le posizioni P_1 : $t_1/T = 1/4$ viene percorso $1/4$ della circonferenza

P_3 : $t_3/T = 1/2$ " $1/2$ "

P_2 : $t_2/T = 3/8$ posizione intermedia.

Con semplici considerazioni geometriche e trigonometriche si ottiene per i moduli dei raggi vettori

$$\begin{cases} |OP_1| = |\vec{r}_1| = \sqrt{R^2+R^2} = 4.2 \text{ m} \\ |OP_2| = |\vec{r}_2| = \left((R\cos 45^\circ)^2 + (R + R\sin 45^\circ)^2\right)^{1/2} = \\ \qquad = 5.54 \text{ m} \\ |OP_3| = |\vec{r}_3| = 6.0 \text{ m} \end{cases}$$

e per quanto riguarda le direzioni, specificate dagli angoli rispetto alla direzione dell'asse x :

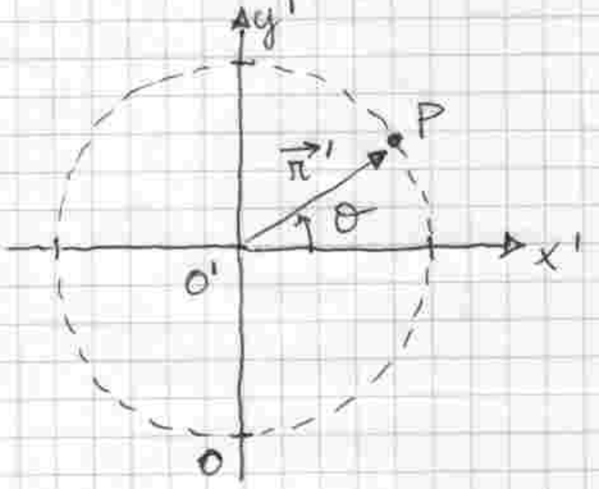
$\theta_1 = 45^\circ = \pi/4$

$\theta_2 = \operatorname{arctg} \dfrac{R(1+\sin 45^\circ)}{R\cos 45^\circ} = 1.18 \text{ rad} = 67.5^\circ$

$\theta_2 = 90^\circ = \pi/2$

Allo stesso risultato si arriva più formalmente, trovando la legge oraria in coordinate cartesiane: $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$

1. Iniziamo con un riferimento cartesiano $(O'x'y')$ con origine O' nel centro della circonferenza, e troviamo



la legge oraria per il raggio vettore

$$O'P(t) = \vec{r}\,'(t) = x'(t)\,\hat{i} + y'(t)\,\hat{j}$$

velocità angolare costante:

$$\omega = \frac{v_s}{R} = \frac{2\pi R}{T} \cdot \frac{1}{R} = \frac{2\pi}{T}$$
$$= 0.314 \text{ rad/s}$$

angolo θ ad un generico istante t:

$$\theta(t) = \omega t + \varphi \qquad \text{, con } \varphi \text{ angolo iniziale } (t=0)$$

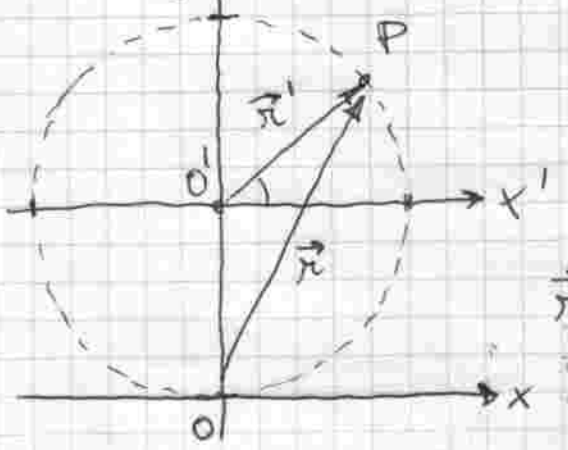
per $t=0$ la particella si trova in O $\left(\theta = -\frac{\pi}{2}\right)$

$$-\frac{\pi}{2} = 0 + \varphi \implies \varphi = -\frac{\pi}{2} \implies \theta(t) = \omega t - \frac{\pi}{2}$$

componenti cartesiane:

$$\begin{cases} x'(t) = R\cos\theta(t) = R\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ y'(t) = R\sin\theta(t) = R\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

2. ~~The same generi~~ La stessa posizione generica nel sistema di riferimento Oxy è data da:



$$\vec{r} = OP = OO' + O'P$$

in componenti cartesiane: $OO' = R\,\hat{j}$

da cui:

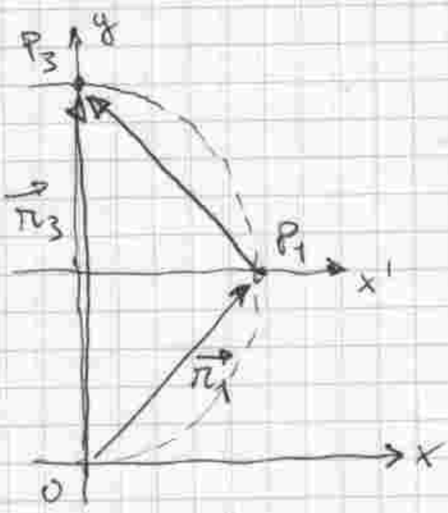
$$\vec{r}(t) \begin{cases} x(t) = x'(t) = R\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ \qquad\qquad = R\sin\omega t \\ y(t) = R + y'(t) = \\ \qquad = R\left[1 + \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ \qquad = R\,(1 - \cos\omega t) \end{cases}$$

i risultati già ottenuti si possono ritrovare sostituendo i valori di R, ω e t $(= t_1, t_2, t_3)$ nella legge oraria, e utilizzando le rispettive coordinate cartesiane.

$$t_1 : \begin{cases} x(t_1) = R\cos\left(\omega t_1 - \frac{\pi}{2}\right) = \ldots = R = 3.0 \text{ m} \\ y(t_1) = R\left[1 + \sin\left(\omega t_1 - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \ldots = R = 3.0 \text{ m} \end{cases}$$

$$t_2 : \begin{cases} x(t_2) = \ldots = 2.12 \text{ m} \\ y(t_2) = \ldots = 5.12 \text{ m} \end{cases}$$

$$t_3 : \begin{cases} x(t_3) = \ldots = 0.0 \text{ m} \\ y(t_3) = \ldots = 6.0 \text{ m} \end{cases}$$



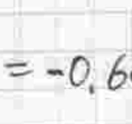
(b) spostamento da P_1 a P_3 :

$$P_1P_3 = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 =$$

$$= (0 - R)\,\hat{i} + (2R - R)\,\hat{j}$$

$$= -R \cdot \hat{i} + R\,\hat{j}$$

$$\begin{cases} |P_1P_3| = \sqrt{R^2 + R^2} = 4.2 \text{ m} \\ \text{~~angle with resp~~ angolo rispetto alla direzione } \hat{i} : \\ \theta = 135° \end{cases}$$



(c) velocità media da t_1 a t_3 :

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_3) - \vec{r}(t_1)}{t_3 - t_1} = \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{t_3 - t_1} = \left(-R\,\hat{i} + R\,\hat{j}\right)\frac{1}{t_3 - t_1}$$

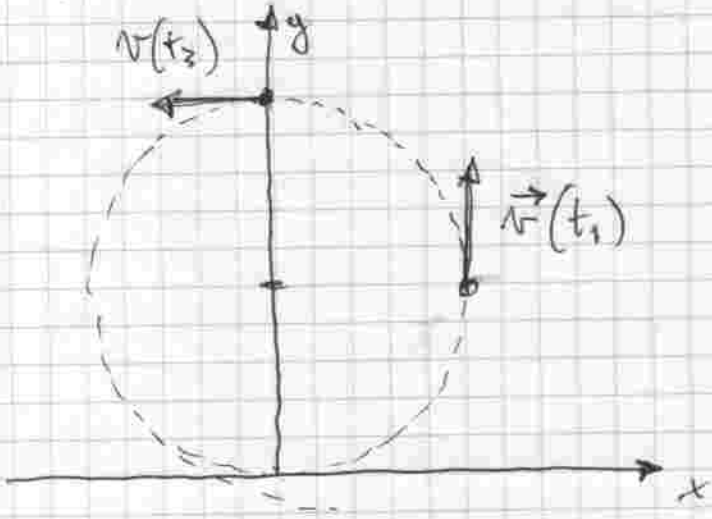
$$\begin{cases} v_{m,x} = -\frac{R}{t_3 - t_1} = -\frac{3.0}{5.0} \text{ m/s} = -0.60 \text{ m/s} \\ v_{m,y} = \frac{R}{t_3 - t_1} = \frac{3.0}{5.0} \text{ m/s} = 0.60 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_m = \sqrt{v_{mx}^2 + v_{my}^2} = 0.85 \text{ m/s} \\ \text{direction: } \theta = 135° \text{ rispetto alla direzione } \hat{i} \end{cases}$$

(d) velocità istantanea per $t = t_1$ e $t = t_2$:

il modulo è costante: $|\vec{v}| = |v_s| = \frac{2\pi R}{T} = 0.942\ m/s$

inoltre il vettore è tangente alla traiettoria, quindi ci aspettiamo che:



$$\vec{v}(t_1) = \underbrace{0}_{v_x(t_1)}\ \hat{i} + \underbrace{0.942\ m/s}_{v_y(t_1)}\ \hat{j}$$

$$\vec{v}(t_2) = \underbrace{-0.942\ m/s}_{v_x(t_2)}\ \hat{i} + \underbrace{0}_{v_y(t_2)} \cdot \hat{j}$$

eseguiamo il calcolo per via analitica:
all'istante generico t, dalle legge oraria del moto:

$$\begin{cases} x(t) = R \sin(\omega t) & \longrightarrow \quad v_x = \frac{dx}{dt} = \omega R \cos(\omega t) \\ y(t) = R\left(1 - \cos(\omega t)\right) & \Longrightarrow \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \omega R \sin(\omega t) \end{cases}$$

dove $\omega = \frac{v_s}{R} = \frac{2\pi}{T} = 0.314\ rad/s$

per $t = t_1 = 5.0\,s$ $\begin{cases} v_x(t_1) = 0.314 \times 3.0 \times \cos(0.314 \times 5.0) = 0.0\ m/s \\ v_y(t_1) = 0.314 \times 3.0 \times \sin(\ \cdots) = 0.942\ m/s \end{cases}$

per $t = t_2 = 10.0\,s$ $\begin{cases} v_x(t_2) = \ldots = -0.942\ m/s \\ v_y(t_2) = \ldots = 0.0\ m/s \end{cases}$

cioè esattamente i valori che ci aspettavamo.

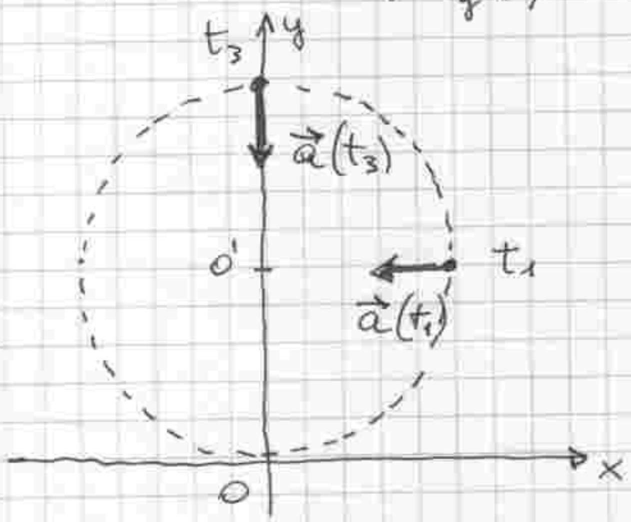
(e) accelerazione istantanea per $t=t_1$ e $t=t_3$

componenti cartesiane al generico istante:

$$v_x(t) = \omega R \cos(\omega t) \implies a_x(t) = -\omega^2 R \sin(\omega t)$$
$$v_y(t) = \omega R \sin(\omega t) \implies a_y(t) = \omega^2 R \cos(\omega t)$$

per $t = t_1$ $\begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 R \\ a_y(t) = 0 \end{cases}$ poiché $\sin(0.314 \times 5.) = 1.0$
" $\cos(0.314 \times 5.) = 0.0$

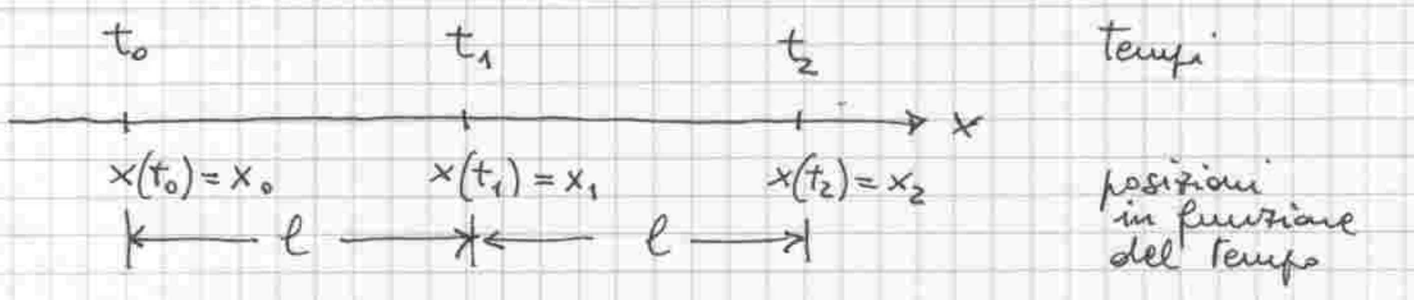
per $t = t_3$ $\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -\omega^2 R \end{cases}$ dato che $\sin(0.314 \times 10.) = 0.0$
" $\cos(0.314 \times 10.) = -1.0$



come ci aspettavamo per un moto circolare uniforme, l'accelerazione risulta essere puramente centripeta, cioè diretta verso il centro O' della circonferenza, e di modulo:

$$|\vec{a}| = \omega^2 R = 0.314^2 \times 3.0 =$$
$$= 0.296 \ m/s^2$$

PROBLEMA 7



moto con accelerazione costante a incognita

Spazi percorsi : $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ell = 10.0 \text{ m}$

tempi impiegati : $\begin{cases} t_1 - t_0 = \tau_1 = 1.06 \text{ s} & (\text{tratto da } x_0 \text{ a } x_1) \\ t_2 - t_1 = \tau_2 = 2.20 \text{ s} & (\text{tratto da } x_1 \text{ a } x_2) \end{cases}$

NB : il problema non specifica la velocità iniziale $v_x(t_0) = v_0$ (né le velocità intermedie): anche questa va considerata come incognita.

Moto uniformemente accelerato, accelerazione costante a : nell' intervallo da t_0 al generico istante t si ottiene, integrando, la velocità:

$$v_x(t) = v_x(t_0) + a\,(t - t_0)$$

e da questa, integrando nuovamente, la posizione $x(t)$:

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} a\,(t - t_0)^2$$

N.B. : queste equazioni si possono applicare a qualsiasi intervallo di tempo, interpretando t_0 come istante iniziale e t come istante finale.

possiamo quindi scrivere, nel nostro caso:

da t_0 a t_1 : $$\underbrace{x(t_1) - x(t_0)}_{\ell} = \underbrace{v_x(t_0)}_{v_0}\underbrace{(t_1 - t_0)}_{\tau_1} + \frac{1}{2} a\,\underbrace{(t_1 - t_0)}_{\tau_1}^2 \qquad (1)$$

da t_1 a t_2 : $$\underbrace{x(t_2) - x(t_1)}_{\ell} = v_x(t_1)\underbrace{(t_2 - t_1)}_{\tau_2} + \frac{1}{2} a\,\underbrace{(t_2 - t_1)}_{\tau_2}^2 \qquad (2)$$

inoltre
da t_0 a t_1 : $$v_x(t_1) = \underbrace{v_x(t_0)}_{v_0} + a\,\underbrace{(t_1 - t_0)}_{\tau_1} \qquad (3)$$

Possiamo quindi riscrivere, sostituendo (3) in (2):

$$\begin{cases} v_0 \tau_1 + \frac{1}{2} a \tau_1^2 = \ell & (1') \\ (v_0 + a\tau_1)\tau_2 + \frac{1}{2} a \tau_2^2 = \ell & (2') \end{cases}$$

dalla (1'): $v_0 = \frac{\ell}{\tau_1} - \frac{1}{2} a \tau_1$

(Controllo dimensionale $[v_0] = \ldots = [L T^{-1}]$ O.K.)

sostituendo nella (2') si trova

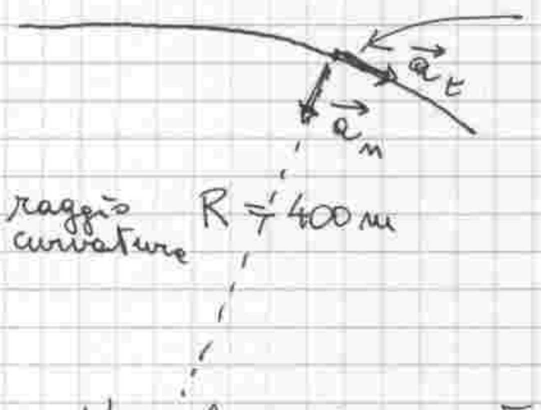
$$a = \frac{2\ell}{\tau_1 \tau_2} \cdot \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} =$$

controllo dimensionale: $[a] = \ldots = [L T^{-2}]$: OK

$$= \frac{2 \times 10.0}{1.06 \times 2.20} \cdot \frac{(1.06 - 2.20)}{(1.06 + 2.20)} = -3.00 \ m/s^2 \quad < 0$$

In effetti, come ci si doveva aspettare, l'accelerazione risulta negativa, dato che il tempo di percorrenza del secondo tratto è $\tau_2 > \tau_1$, maggiore di quello del primo tratto.

PROBLEMA 8



all'istante considerato:

$v_s = 10$ m/s velocita' scalare

$a_t = 0.20$ m/s^2 accelerazione tangenziale

(modulo) $a_t = |\vec{a}_t|$

L'accelerazione centripeta ha modulo:

$$a_n = \frac{v_s^2}{R} = \frac{10^2}{400} = 0.25 \ m/s^2$$

L'accelerazione totale $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$ ha modulo

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = 0.32 \ m/s^2$$

PROBLEMA 9

moto piano di equazioni
$$\begin{cases} x(t) = 3 + \frac{3}{2}t^2 & (1) \\ y(t) = 6 + \frac{5}{2}t^2 & (2) \end{cases}$$

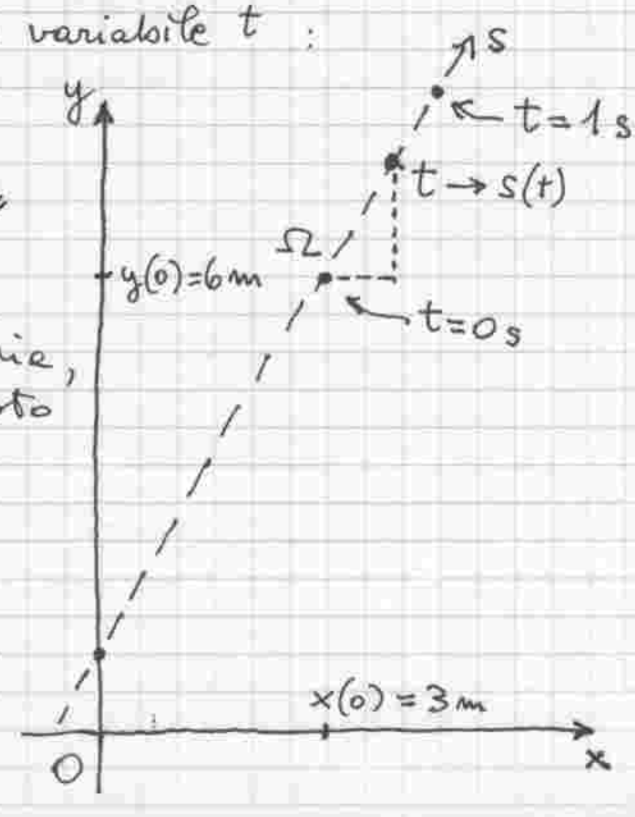
determinare l'equazione della traiettoria e la legge oraria del moto.

Eliminando per sostituzione la variabile t:

$$(1) \Rightarrow t^2 = \frac{2}{3}(x-3)$$

$$(2) \Rightarrow y = 6 + \frac{5}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3}(x-3)$$

$$\boxed{y = 1 + \frac{5}{3}x}$$



si trova l'equazione della traiettoria, che e' rettilinea e percorsa con moto uniformemente accelerato.
Scegliendo come origine per le ascisse curvilinee $\Omega(3\,m, 6\,m)$

$$s(t) = \sqrt{(x(t)-x(0))^2 + (y(t)-y(0))^2} =$$
$$= \left(\left(\frac{3}{2}t^2\right)^2 + \left(\frac{5}{2}t^2\right)^2\right)^{1/2}$$

da cui si ricava :

$$s(t) = \frac{1}{2}\left(3^2+5^2\right)^{1/2} t^2 = \frac{1}{2}\, a t^2$$

dove $a = 5.83\ m/s^2$

la legge oraria per l'ascissa curvilinea $s(t)$ mostra esplicitamente che il moto è uniformemente accelerato, lungo la traiettoria rettilinea.

PROBLEMA 9

legge oraria del moto : $x(t) = \dfrac{v_0}{b}\left(1 - e^{-bt}\right)$

con v_0, b costanti dimensionali

$$\begin{cases} [t] = [T] \\ [bt] = [L^0 M^0 T^0] \end{cases} \Longrightarrow [b] = [T^{-1}]$$ per avere un esponente adimensionale

$$\left.\begin{array}{l} \left[\dfrac{v_0}{b}\right] = [x] = [L] \\ [b] = [T^{-1}] \end{array}\right\} \Longrightarrow [v_0] = [LT^{-1}]$$ v_0 ha dimensioni di una velocità,

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \ldots = v_0 e^{-bt}$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -v_0 b\, e^{-bt}$$ con $[v_0 b] = [LT^{-2}]$ O.K.