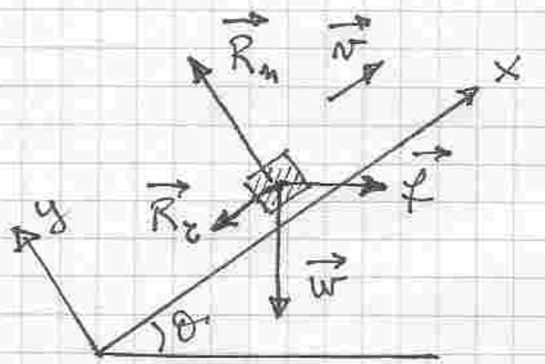
ESERCIZI E PROBLEMI - SETTIMANE 5-7 - SOLUZIONI

PROBLEMA 1 (6.18)



Introduciamo un riferimento cartesiano con asse x nel piano inclinato, verso l'alto, (linea di massima pendenza) ed asse y ortogonale al piano inclinato

Usando le notazioni del Focardi, le quattro forze applicate al corpo (approssimato come puntiforme) sono:

$$\begin{cases} \text{forza peso:} & \vec{w} = -mg\sin\theta\ \hat{i} - mg\cos\theta\ \hat{j} \\ \text{forza orizz.:} & \vec{f} = f\cos\theta\ \hat{i} - f\sin\theta\ \hat{j} \\ \text{reazione norm.:} & \vec{R}_n = R_n\hat{j} \\ \text{attrito dinamico:} & \vec{R}_\tau = -\mu_d R_n\hat{i} \quad \text{se la velocità è diretta verso l'alto.} \end{cases}$$

dove: $m = 4.8\ kg$, $g = 9.81\ m/s^2$, $f = 46\ N$, $\theta = 39.0°$

$\mu_d = 0.33$ (il coeff. di attrito statico è $\mu_s \geq \mu_d$)

a) II principio della dinamica:

$$\vec{f}_{tot.} = \vec{w} + \vec{f} + \vec{R}_n + \vec{R}_\tau = m\vec{a} \overset{\text{moto vincolato lungo } x}{=} ma\hat{i}$$

componenti cartesiane:

$$x: \text{ lungo } \hat{i} \quad -mg\sin\theta + f\cos\theta + 0 - \mu_d R_n = ma \qquad (1)$$

$$y: \text{ lungo } \hat{j} \quad -mg\cos\theta - f\sin\theta + R_n + 0 = 0 \qquad (2)$$

dalla (2): la reazione normale ha componente y soltanto:

$$R_n = mg\cos\theta + f\sin\theta = 65.5\ N$$

sostituendo nella (1) si ricava a:

$$a = -g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta) + \frac{f}{m}(\cos\theta - \mu_d\sin\theta) = -3.22\ m/s^2$$

b) il blocco sale con velocità iniziale $v_0 \hat{i} = v_x(t=0)$
l'accelerazione è $a\hat{i}$, con $a<0$ costante
la velocità quindi diminuisce secondo la:

$$v_x(t) = v_0 + at \qquad (a<0)$$

e si annulla per $t = -\frac{v_0}{a} = 1{,}33\ s$

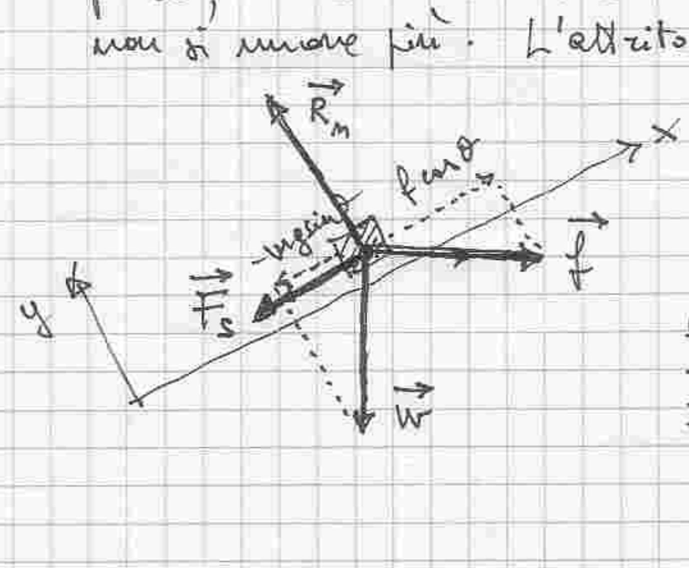
lo spazio percorso in questo tempo è:

$$x(t) - x(0) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = -\frac{v_0^2}{2a} = 2.87\ m$$

c) Nell'istante in cui si ferma, il blocco è sottoposto alle seguenti forze, escludendo per il momento l'attrito, e considerando soltanto la componente x, che è quella rilevante per il moto:

$$(\vec{w} + \vec{f}) \cdot \hat{i} = -mg \sin\theta + f\cos\theta =$$
$$= -29.60\ N + 35.75\ N =$$
$$= +6.14\ N \quad (\text{verso l'alto})$$

essendo il coefficiente di attrito statico $\mu_s \geq \mu_d = 0.33$, la forza d'attrito statico può giungere almeno fino all'intensità $\mu_d R_n = 21.6\ N$:
è quindi in grado di compensare le altre due forze, mantenendo il blocco in quiete: il blocco non si muove più. L'attrito statico sarà:



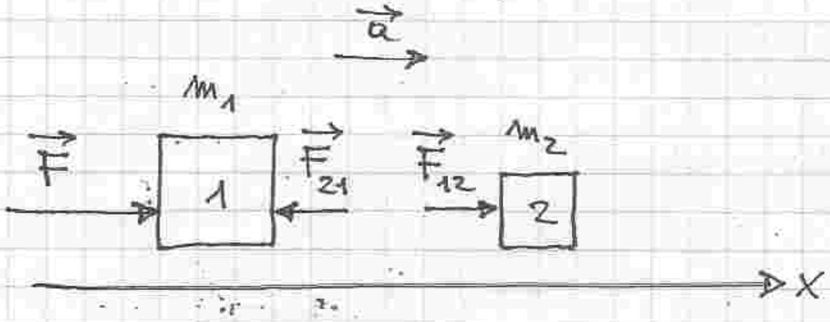
$$\vec{F}_s = -(-mg\sin\theta + f\cos\theta)\hat{i} =$$
$$= -6.14\ N\ \hat{i}$$

e risulterà

$$\vec{f} + \vec{w} + \vec{R}_n + \vec{F}_s = 0$$

PROBLEMA 2 (5.56)

$m_1 = 2.3$ kg , $m_2 = 1.2$ kg



per evidenziare le forze ed i punti di applicazione: diagrammi di corpo libero, corpi separati. (per semplicita' non indichiamo forze peso e reazione normale)

a) forza esterna: $\vec{F} = F\hat{\imath}$, $F = 3{,}2$N

forze di contatto: $\vec{F}_{21} = -F_c\,\hat{\imath} = -\vec{F}_{12}$
$\vec{F}_{12} = F_c\,\hat{\imath}$
III principio! (F_c : incognita)

accelerazione comune: $\vec{a} = a\hat{\imath}$

II principio, corpo 1 : $\vec{F} + \vec{F}_{21} = m_1\vec{a}$

$$F + (-F_c) = m_1 a \quad (1)$$

II principio, corpo 2 : $\vec{F}_{12} = m_2\vec{a}$

$$F_c = m_2 a \quad (2)$$

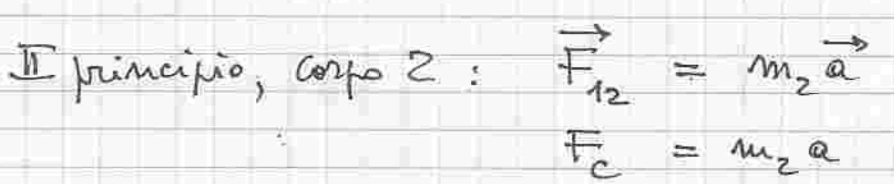
sostituendo la (2) nella (1) si trova:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = 0{,}91 \text{ m/s}^2$$

come dovevamo aspettarci considerando i due corpi come un corpo unico

$$F_c = m_2 a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F = 1{,}1 \text{ N}$$

b) nel caso che la forza $-\vec{F}$ sia applicata al corpo 2



$-\vec{F} = (-F)\hat{\imath}$ $\qquad F = |\vec{F}| = 3.2$ N

$$\begin{cases} \text{corpo 1}: & -F_c = m_1 a \quad (1) \\ \text{corpo 2}: & F_c + (-F) = m_2 a \quad (2) \end{cases}$$

l'accelerazione e' negativa, ma ha lo stesso modulo del caso precedente

da cui
$$\begin{cases} a = -\dfrac{F}{m_1 + m_2} = -0.91 \text{ m/s}^2 \\ F_c = -m_1 a = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} F = 2.1 \text{ N} \end{cases}$$

la forza di contatto e' diversa, perche' deve imprimere la stessa accelerez. a masse diverse.

PROBLEMA 3 (n. 14) $\longrightarrow \vec{a} = a\hat{\imath}$

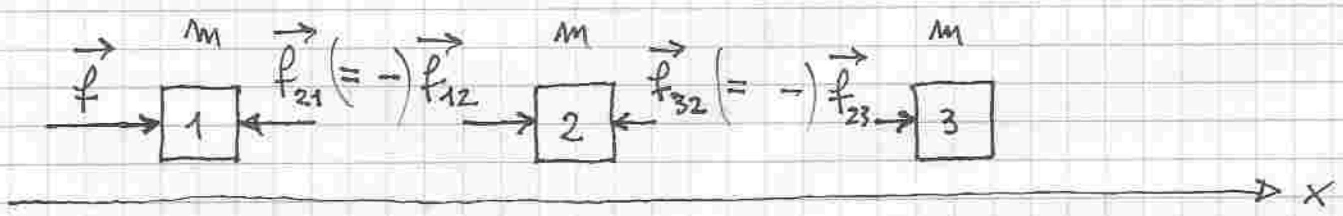


Diagramma di corpo libero per i tre corpi separatamente;
per semplicità non indichiamo forze di gravità e reazione normale

I tre corpi, ciascuno di massa m, si muovono solidali,
tutti con accelerazione $\vec{a}$.

II principio, corpo (1+2+3) massa totale $3m$: $\vec{f}_{tot} = \vec{f} = f\hat{\imath} = (3m)\,a\hat{\imath}$

$$f = 3ma \quad (1)$$

II principio, corpo 1 : $\vec{f} + \vec{f}_{21} = m\vec{a} \Rightarrow f - f_{12} = ma$ (2)

dove : III principio: $\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12} = -f_{12}\hat{\imath}$

II principio, corpo 2 : $\vec{f}_{12} + \vec{f}_{32} = m\vec{a} \Rightarrow f_{12} - f_{23} = ma$ (3)

dove : III principio: $\vec{f}_{32} = -\vec{f}_{23} = -f_{23}\hat{\imath}$

II principio, corpo 3 : $\vec{f}_{23} = m\vec{a} \Rightarrow f_{23} = ma$ (4)

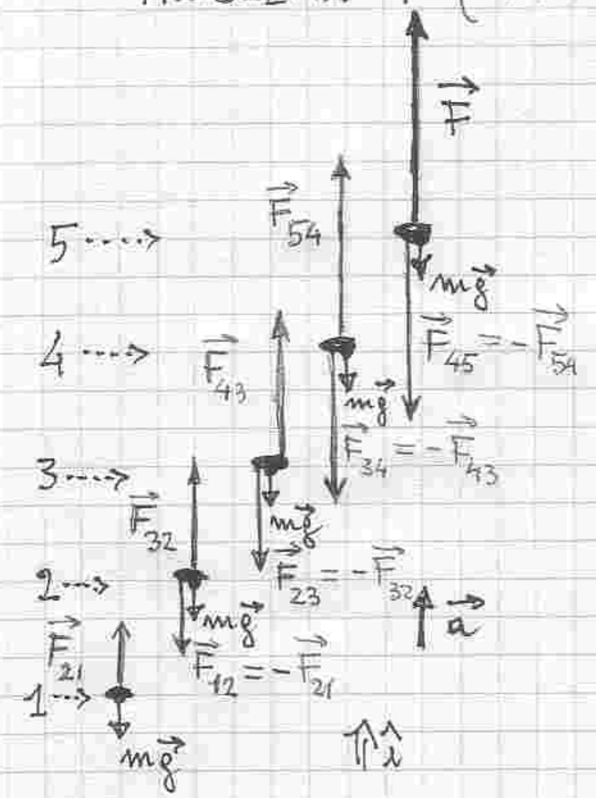
Le incognite sono a, f_{12}, f_{23} : le 4 equazioni non sono tutte indipendenti (p. es. la (1) si può ottenere sommando le altre m. a m.)

$$(1) \Rightarrow a = \frac{f}{3m}$$

$$(2) \Rightarrow f_{12} = f - ma = \frac{2}{3}f$$

$$(4) \Rightarrow f_{23} = m\frac{f}{3m} = \frac{1}{3}f$$

PROBLEMA 4 (n. 5.58)



Diagrammi di corpo libero per i 5 anelli della catena, rappresentati per chiarezza come 5 punti materiali separati.

(b) considerando l'insieme dei 5 anelli un unico corpo di massa $5m$:

$$\vec{f}_{tot} = \vec{F} + \ldots + (5m)\vec{g} = (5m)\vec{a}$$

← la somma delle forze "interne" è nulla, per il III principio

componente lungo x:

$$F + (-5mg) = 5ma$$

$$F = 5m(g+a) =$$
$$= 6.15\ N$$

$\vec{g} = -g\hat{\imath} \quad g = 9.81\ m/s^2$

$\vec{a} = a\hat{\imath} \quad a = 2.50\ m/s^2$

$m = 100\,g = 0.100\ kg$

Scriviamo il II principio per ciascun anello, tenendo conto del III principio:

(a) anello 1 : $F_{21} + (-mg) = ma \Rightarrow F_{21} = m(g+a) = 1.23N$

anello 2 : $F_{32} + (-mg) + (-F_{21}) = ma \Rightarrow F_{32} = F_{21} + m(g+a)$

cioè : $F_{32} - mg - m(g+a) = ma \Rightarrow F_{32} = 2m(g+a) = 2.46N$

anello 3 : $F_{43} + (-mg) + (-F_{32}) = ma \Rightarrow F_{43} = 3m(g+a) = 3.69\ N$

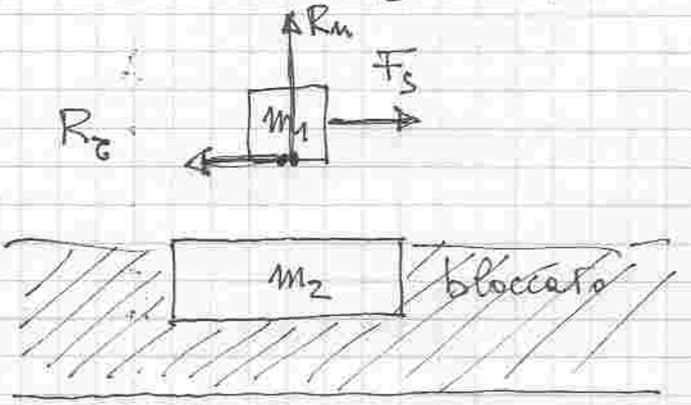
anello 4 : $F_{54} + (-mg) + (-F_{43}) = ma \Rightarrow F_{54} = 4m(g+a) = 4.92\ N$

anello 5 : $F + (-mg) + (-F_{54}) = ma \Rightarrow F = 5m(g+a) = 6.15\ N$

(c) Si vede subito che la risultante su ciascun anello è la stessa : $f = ma = 0.25\ N$

PROBLEMA 5 (n. 6.30)

$m_1 = 4.40\ kg \quad m_2 = 5.50\ kg$



Diagrammi di corpo libero dei due corpi e del piano liscio d'appoggio:
preliminarmente determiniamo il coefficiente di attrito statico fra 1 e 2 (tenuto fisso)

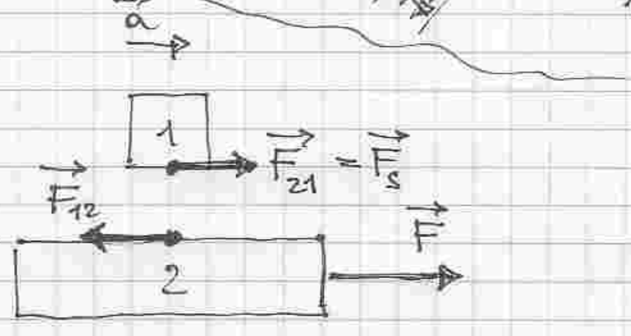
La forza limite di distacco è data: $F_s = 12.0\ N$

$$F_s = |\vec{F}_s| = |\vec{R}_\tau| = \mu_s |\vec{R}_n| = \mu_s m_1 g$$

$R_n + m_1 g = 0$ nella proiezione verticale $\Rightarrow |R_n| = m_1 g$

$\Rightarrow$ si può ricavare il coeff. di attrito statico fra 1 e 2:

$$\mu_s = \frac{F_s}{m_1 g} = 0.278 \Rightarrow$$



Consideriamo ora il caso di forza $\vec{F}$ applicata al blocco 2, in modo tale che i due blocchi si muovano assieme, cioè con forza tangenziale di contatto uguale a quella limite $\vec{F}_s$ discussa sopra.
(a questa corrisponderà la forza limite F da determinare)

indichiamo solo le forze orizzontali, rilevanti per il moto

$\vec{F} = F\hat{i}$

$\vec{F}_{12} = -F_s\hat{i} = -\vec{F}_{12}$ (III principio)

$\vec{F}_{21} = F_s\hat{i}$

accelerazione corrispondente alla forza limite:

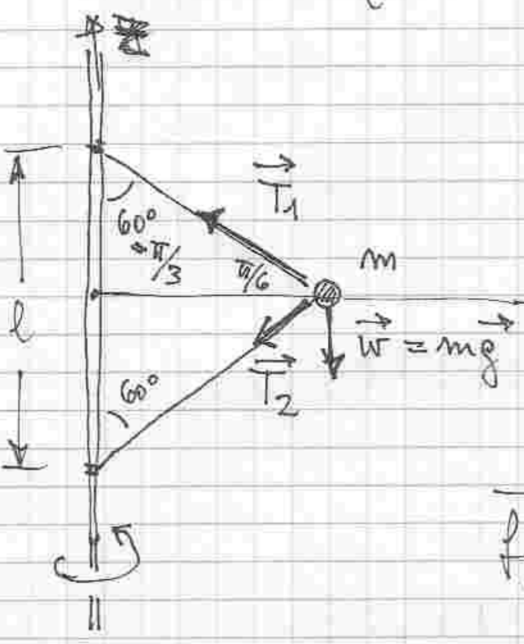
corpo 1 : II principio (1) $F_s = m_1 a \quad \Rightarrow a = \frac{F_s}{m_1} = 2.73\ m/s^2$

corpo 2 : II principio (2) $F + (-F_s) = m_2 a \Rightarrow$

$$\Rightarrow F = F_s + m_2 a = F_s\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = 27\ N$$

è la forza limite richiesta.

PROBLEMA 6 (n. 6.52) $|\vec{T}_1| = 35{,}0\ N$,



forze agenti sulla pallina di massa m :

$\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{w} = m\vec{g}$

il moto della pallina è circolare uniforme ; per il II principio :

$$\vec{f}_{tot} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{w} = m\vec{a} \qquad (1)$$

moto circ. unif. $\Rightarrow$ accel. centripeta

Scomponiamo l'eq. (1) in due componenti : $\begin{cases}\text{radiale } x \\ \text{verticale } z\end{cases}$ nell'istante in cui la pallina attraversa, nel suo moto rotatorio, il piano (x, z)

proiez. su $\hat{\imath}$: (asse x) $\quad T_1 \underbrace{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}_{-\sqrt{3}/2} + T_2 \underbrace{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}_{-\sqrt{3}/2} = -m\frac{v_s^2}{R} \qquad (1)$

proiez. su $\hat{k}$: (asse z) $\quad T_1 \underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{1/2} - T_2 \underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{1/2} - mg = 0 \qquad (2)$

non c'è accel. verticale il moto è nel piano orizzontale

(a) dalla (2) : $T_2 = T_1 - 2mg = 8{,}74\ N$

(b) dalla (1) : [e tenendo conto dalla (2)] $\quad \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{w} = (\vec{T}_1 + \vec{T}_2)\cdot\hat{\imath} =$

$$= -(T_1 + T_2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} = -37{,}9\ N\cdot\hat{\imath}$$

(diretta orizzontalmente verso l'asse centrale).

(c) dalla (1) : $\quad (T_1 + T_2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = m\frac{v_s^2}{R} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{m}{\ell}v_s^2 \qquad R = \ell\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

dove si è usata l'espressione dell'accelerazione centripeta in funzione di velocità scalare v_s e raggio di curvatura R

$$\Rightarrow v_s = \sqrt{\frac{3\ell}{4m}(T_1 + T_2)} = 6{,}45\ m/s^{-1}$$

PROBLEMA 7 (n. 13)

$v_0 = 85$ km/h $=$
$= 23.6$ m/s

$\ell = 65$ m spazio d'arresto

Nel normale rotolamento senza scivolamento, la superficie di contatto ~~dei~~ tra pneumatico e strada e' istantaneamente in quiete $\Rightarrow$ attrito statico.

(a) L'accelerazione richiesta per rallentare l'automobile e' quella fornita dalla forza risultante di attrito statico $\vec{F}_s = -F_s\hat{\imath}$ (forza di gravità e reazione normale fanno lavoro nullo)

Teorema dell'energia cinetica:

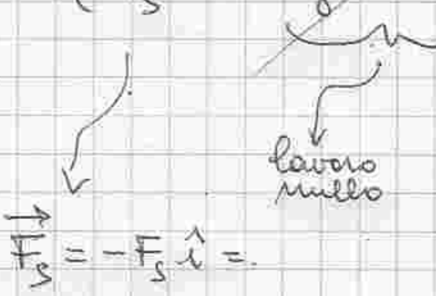
$$(\vec{F}_s + \underbrace{\cancel{m\vec{g} + \vec{R}_n}}_{\text{lavoro nullo}}) \cdot \underbrace{\ell\hat{\imath}}_{\text{spazio d'arresto}} = \underbrace{0}_{\text{en. cin. finale}} - \underbrace{\frac{1}{2} m v_0^2}_{\text{en. cin. iniziale}}$$

$\vec{F}_s = -F_s\hat{\imath} =$
$= -\mu_s R_n \hat{\imath} = -\mu_s m g \hat{\imath}$

$$\Rightarrow \quad -\mu_s \cancel{m} g \ell = -\frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2$$

$$\mu_s = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g\ell} = \frac{1}{2}\frac{(23.6)^2}{9.81 \times 65} = 0.44$$

(b)



$v_0 = 85$ km/h $= 23.6$ m/s

$R = 82$ m

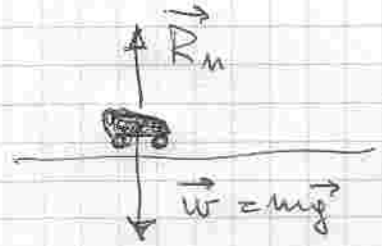
la forza centripeta $F_c = m\dfrac{v_s^2}{R}$ (1)

dev'essere fornita dall'attrito statico dei pneumatici, che nel caso limite e'

$F_s = \mu_s R_n = \mu_s m g$ (2)

uguagliando (1) e (2): $\mu_s = \dfrac{v_s^2}{Rg} = 0.69$

PROBLEMA 8 (n. 14)

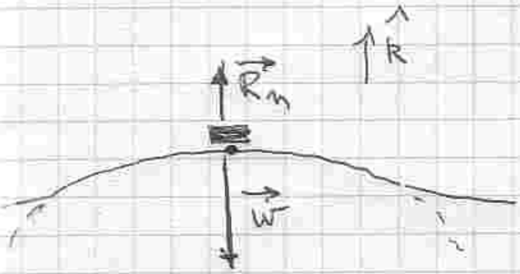


su strada orizzontale diritta, non ondulata

$$\vec{R}_n + \vec{w} = 0 \qquad \vec{R}_n = -\vec{w}$$

$$|\vec{R}_n| = |\vec{w}| = 16 \text{ kN}$$

$$\underset{R_n}{\shortparallel} \qquad \underset{w = mg}{\shortparallel}$$



sulla sommità di un dosso, di curvatura $R = 250$ m

$$\vec{R}_n + \vec{w} = \vec{F}_c = -m\frac{v_s^2}{R}\hat{k}$$

$|\vec{R}_n| < |\vec{w}|$, per poter avere risultante centripeta diretta verso il basso

dato del problema:

$$|\vec{R}_n| = \frac{1}{2}|\vec{w}| \implies \frac{1}{2}w + (-w) = -\frac{w}{2} = -m\frac{v_s^2}{R}$$

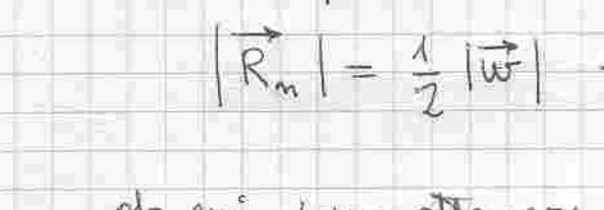
$$w = mg$$

da cui posso ottenere la velocità scalare:

$$-\frac{\cancel{m}g}{2} = -\frac{\cancel{m}v_s^2}{R} \implies v_s^2 = \frac{gR}{2} \implies v_s = \sqrt{\frac{gR}{2}} =$$

$$= 35.0 \text{ m/s} = 126 \text{ km/h}$$

(a) Al passaggio alla stessa velocità in una cunetta con lo stesso raggio di curvatura:



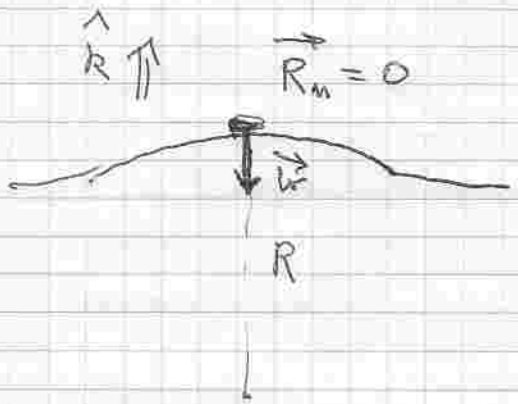
$$\vec{R}_n + \vec{w} = \vec{F}_c = +m\frac{v_s^2}{R}\hat{k}$$

in questo caso, $|\vec{R}_n| > |w|$ affinché la risultante centripeta sia rivolta verso l'alto. Scrivendo le componenti verticali in termini dei moduli

$$R_n + (-w) = m\frac{v_s^2}{R} = m\frac{g\cancel{R}}{2\cancel{R}} = m\frac{g}{2}$$

$$R_n = w + m\frac{v_s^2}{R} = mg + \frac{mg}{2} = \frac{3}{2}mg = 24 \text{ kN}$$

(b) La massima velocità possibile prima che avvenga il distacco sul dosso è quella per la quale la reazione normale R_n si annulla, e il mantenimento sulla traiettoria con contatto limite col terreno è assicurato dalla sola forza di gravità, che agisce da forza centripeta nel moto ~ circolare :

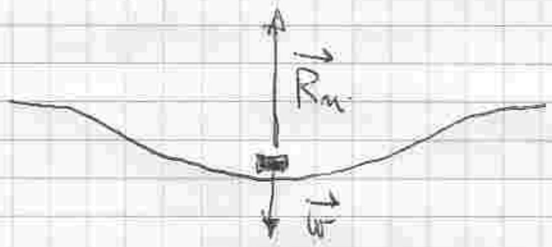


$$\underset{0}{\cancel{\vec{R}_n}} + \underset{-mg\,\hat{k}}{\underset{\parallel}{\vec{w}}} = \vec{F}_c = -m\frac{v_s^2}{R}\hat{k}$$

$$\frac{\cancel{m}\,v_s^2}{R} = \cancel{m}g \Longrightarrow v_s^2 = gR$$

$$v_s = \sqrt{gR} = 49.5 \text{ m/s} = 178 \text{ km/h}$$

alla velocità così calcolata la reazione normale in fondo al dosso è :



$$R_n + \underset{-mg}{(-w)} = m\frac{v_s^2}{R} = m\frac{g\cancel{R}}{\cancel{R}}$$

$$R_n = mg + mg = 2mg = 2w = 32 \text{ kN}$$