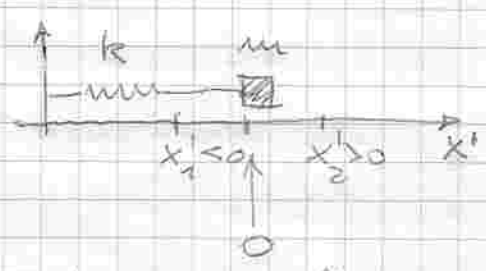


PROBLEMA 1



a) se la molla è accorciata di $x'_1 < 0$ (vedi figura) nel sistema di riferimento non inerziale la massa m è in quiete e sottoposta a risultante delle forze nulla, includendo la forza elastica (reale) e quella inerziale:

$$\vec{F}_{el} = -kx'_1 \hat{i}$$

$$\vec{F}_i = (-mA) \hat{i}$$

$$\vec{F}_{el} + \vec{F}_i = 0$$

$$-kx'_1 + (-mA) = 0 \Rightarrow A = -\frac{k}{m} x'_1 > 0$$

dove A è l'accelerazione (positiva) del veicolo

b) analogamente, se la molla è allungata di $x'_2 > 0$ si ha:

$$\vec{F}_{el} = -kx'_2 \hat{i}$$

$$\vec{F}_i = (-mA) \hat{i}$$

$$\vec{F}_{el} + \vec{F}_i = 0$$

$$-kx'_2 + (-mA) = 0 \Rightarrow A = -\frac{k}{m} x'_2 < 0$$

dove A è l'accelerazione (negativa!) del veicolo.

Note: in questa soluzione abbiamo indicato con A la componente dell'accelerazione \vec{A} lungo la direzione \hat{i} : $A > 0$ nel caso a), $A < 0$ nel caso b), non il modulo (sempre positivo) $|\vec{A}| > 0$

PROBLEMA 2

(2)

Conviene studiare il moto in un riferimento solidale con il veicolo, quindi non inerziale, tenendo conto delle forze "inerziali" o apparenti.

a) Oltre alla tensione del filo, sulle masse m agiscono

$$\left. \begin{array}{l} \text{gravità} \\ \text{forza inerziale} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{f}_g = m\vec{g} = mg\hat{i} \\ \vec{f}_i = -m\vec{A} = mA\hat{i} \end{array}$$

(moduli):
 $g = |\vec{g}| = 9.81 \text{ m/s}^2 > 0$

$A = |\vec{A}| = g/3 > 0$

$\vec{A} = -A\hat{i}$ diretta verso l'alto $\Rightarrow -m\vec{A} = -m(-A)\hat{i} = mA\hat{i}$
 diretta verso il basso.



l'equazione del moto (vedi: pendolo semplice in un rif. inerziale) per la presenza delle forze inerziali diventa:

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -m(g+A) \text{ sen}\theta$$

che, nell'approssimazione di

piccoli angoli ($\text{sen}\theta \approx \theta$), ha soluzioni oscillanti, di periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+A}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+g/3}} = 1.74 \text{ s}$$

b) in questo caso, forze di gravità e forze inerziali sono fra di loro discordanti:

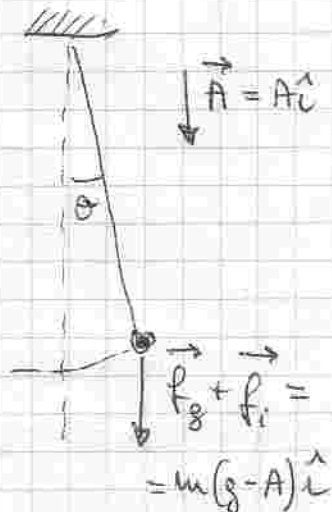
$$\vec{f}_g = m\vec{g} = mg\hat{i} \quad (\text{diretta verso il basso})$$

$$\vec{A} = A\hat{i} \quad (\text{diretta verso il basso}) \quad A = |\vec{A}| > 0$$

$$\vec{f}_i = -m\vec{A} = -mA\hat{i} \quad (\text{diretta verso l'alto})$$

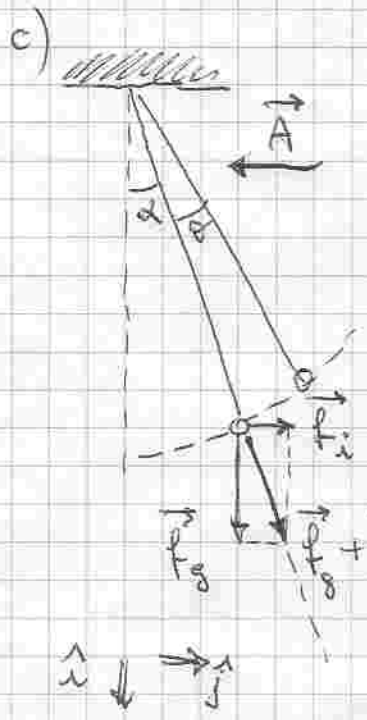
in ragionamento analogo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-A}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-g/3}} = 2.46 \text{ s}$$



Nota: in queste soluzioni abbiamo indicato con $A > 0$ il modulo dell'accelerazione \vec{A} ; la componente dell'accelerazione \vec{A} lungo la direzione \hat{i} è

$$\left. \begin{array}{l} -A < 0 \text{ nel caso (a)} \\ A > 0 \text{ nel caso (b)} \end{array} \right\}$$



in questo caso, forze di gravità e forze inerziali non sono parallele: la loro risultante è inclinata di un angolo α rispetto alla verticale: $\alpha = \arctan \frac{A}{g} = 18,4^\circ$

ed ha intensità:

$$|\vec{f}| = \sqrt{|\vec{f}_g|^2 + |\vec{f}_i|^2} = m \sqrt{g^2 + A^2}$$

Come si vede f. es. partendo dalle componenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{f}_g = mg \hat{i} \quad \text{diretta verso il basso} \\ \vec{A} = -A \hat{j} \quad \text{diretta f. es. verso sinistra} \\ -m\vec{A} = -m(-A) \hat{j} = mA \hat{j} \quad \text{diretta orizzontalmente verso destra} \end{array} \right.$$

Le oscillazioni avvengono attorno alla posizione definita dall'angolo α , che identifica la posizione di equilibrio stabile, o, in altri termini, la "verticale effettiva".

Tutto avviene come se alla forze di gravità di intensità mg fosse sostituita la forza di intensità $m \sqrt{g^2 + A^2}$.

Il periodo di oscillazione è quindi

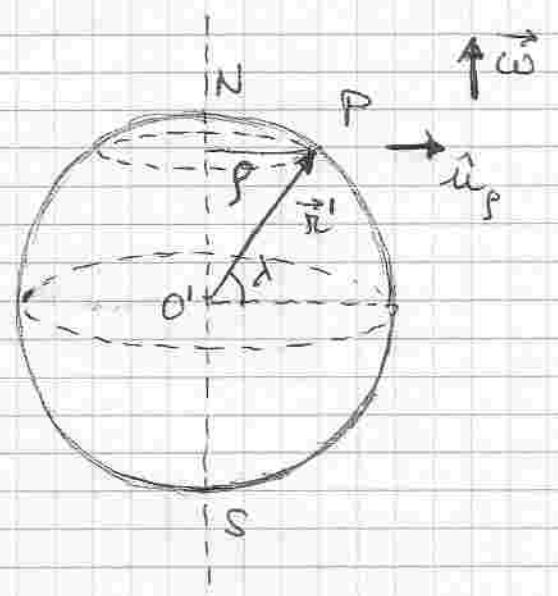
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + A^2}}} \cong 1,90 \text{ s.}$$

Nota: Anche in questo caso abbiamo indicato con $A > 0$ il modulo dell'accelerazione \vec{A} ; la componente di \vec{A} lungo la direzione \hat{j} mostrata in figura è $(-A) < 0$

4

PROBLEMA 3

Seguendo le notazioni del Focardi (paragrafo 5-9): la forza inerziale centrifuga agente su un oggetto di massa m , in quiete rispetto alla terra, che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$, è:



$$\vec{f}_{cf} = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = m \omega^2 \rho \hat{u}_p$$

dove: $\rho = R \cos \lambda$ raggio delle circonferenze descritte dal punto P in cui si trova il corpo considerato
 R raggio terrestre
 λ latitudine di P

\hat{u}_p : versore diretto radialmente verso l'esterno, nel piano perpendicolare all'asse di rotazione.

$$\omega^2 \rho = \omega^2 R \cos \lambda = 3,38 \times 10^{-2} \cos \lambda \text{ m/s}^2$$

da confrontare con il modulo dell'accelerazione di gravità

$$g = 9,80 \text{ m/s}^2$$

abbiamo usato: $\left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \text{ rad/s} \\ = 7,27 \times 10^{-5} \text{ rad/s} \\ R = 6,37 \times 10^6 \text{ m} \end{array} \right.$

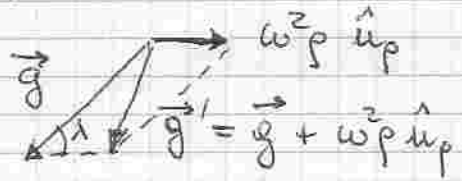
a) al polo Nord:

$$\lambda = 90^\circ \Rightarrow \cos \lambda = 0 \Rightarrow \rho = 0$$

$$\vec{f}_{cf} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g' = g \\ \text{la direzione non è modificata} \end{array} \right.$$

b) per $\lambda = 45^\circ$:

per effettuare la somma scomponiamo i due vettori nelle direzioni



$\left\{ \begin{array}{l} \text{radiale e perpendicolare} \\ \text{all'asse di rotazione} : \hat{u}_p \rightarrow \\ \text{assiale, da N a S} : \hat{u}_{NS} \downarrow \end{array} \right.$

$$\vec{g} = (-g \cos \lambda) \hat{u}_p + (g \sin \lambda) \hat{u}_{NS}$$

$$\vec{g}' = (-g \cos \lambda + \omega^2 R \cos \lambda) \hat{u}_p + (g \sin \lambda) \hat{u}_{NS}$$

$$g' = |\vec{g}'| = \left((g^2 \cos^2 \lambda - 2g\omega^2 R \cos^2 \lambda + (\omega^2 R)^2 \cos^2 \lambda) + g^2 \sin^2 \lambda \right)^{1/2}$$
$$= \left(g^2 - 2g^2 \frac{\omega^2 R}{g} \cos^2 \lambda + g^2 \left(\frac{\omega^2 R}{g} \right)^2 \cos^2 \lambda \right)^{1/2} =$$
$$= g \left(1 - 2 \frac{\omega^2 R}{g} \cos^2 \lambda + \left(\frac{\omega^2 R}{g} \right)^2 \cos^2 \lambda \right)^{1/2}$$

\Rightarrow for $\lambda = 45^\circ$: $\cos^2 \lambda = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$

$$g' = g \left(1 - \frac{\omega^2 R}{g} + \left(\frac{\omega^2 R}{g} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \right)^{1/2} \quad \frac{\omega^2 R}{g} = 3.45 \times 10^{-3}$$

$$\frac{g'}{g} = \left(1 - \frac{\omega^2 R}{g} + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2 R}{g} \right)^2 \right)^{1/2} \quad \left(\frac{\omega^2 R}{g} \right)^2 = 1.19 \times 10^{-5}$$

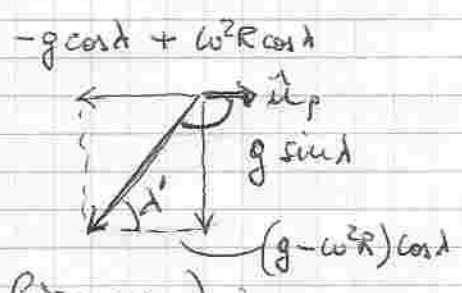
\hookrightarrow trascurando questo inf. mo di ordine superiore e sviluppando in serie di Taylor $\frac{g'}{g}$ nelle variabile $x = \frac{\omega^2 R}{g}$

$$\frac{g'}{g} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2 R}{g} \quad \text{con buona approssimazione}$$

$$\approx 0.9983 \quad \Rightarrow \quad \boxed{g' = 9.78 \text{ m/s}^2}$$

Note le componenti di \vec{g}' per calcolare l'angolo θ che esso forma, p.es. con la direzione \hat{u}_p , e confrontarlo con λ :

$$\tan \theta = \frac{g \sin \lambda}{(-g + \omega^2 R) \cos \lambda}$$



o piuttosto l'angolo λ' , direttamente confrontabile con la latitudine λ (vedi figura):

$$\tan \lambda' = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2 R}{g}} \tan \lambda \approx \left(1 + \frac{\omega^2 R}{g} \right) \tan \lambda$$

c) all'equatore: $\lambda = 0^\circ \Rightarrow \cos \lambda = 1 \Rightarrow \rho = R$

$$g' = g \left(1 - 2 \frac{\omega^2 R}{g} + \left(\frac{\omega^2 R}{g} \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$= g \left(1 - \frac{\omega^2 R}{g} \right) =$$

$$= g - \omega^2 R =$$

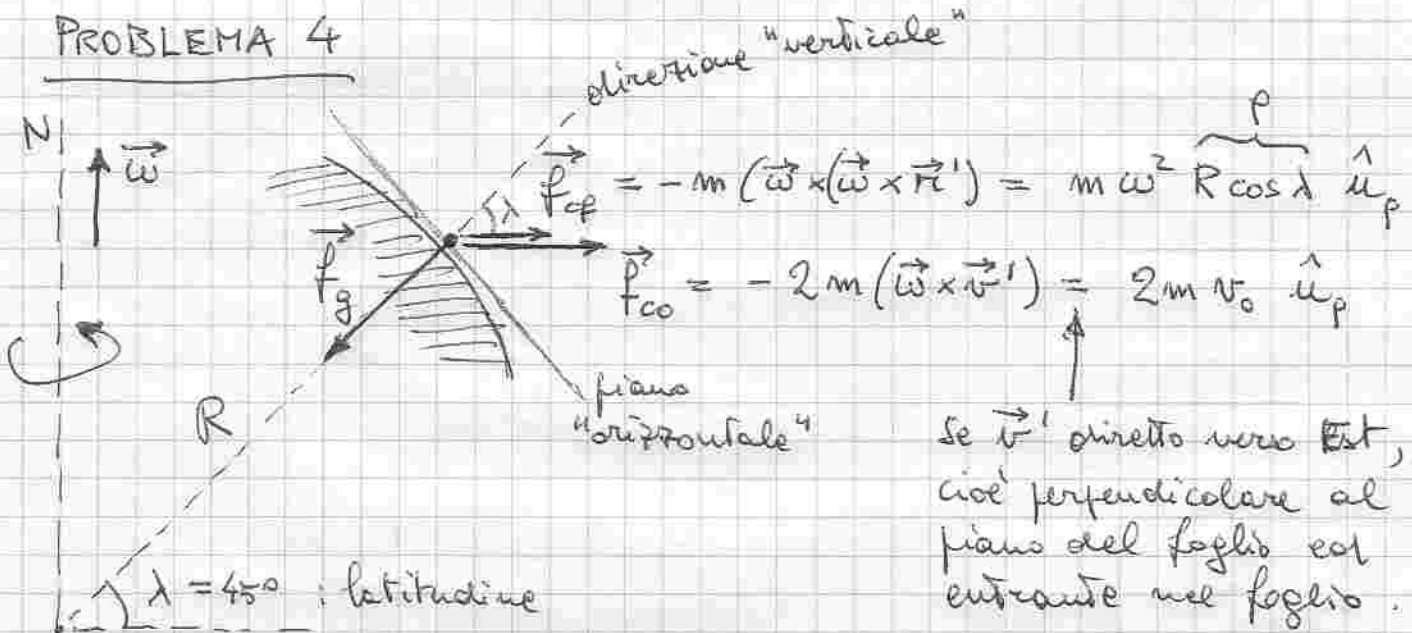
$$= 9.766 \text{ m/s}^2$$

$$\boxed{\approx 9.77 \text{ m/s}^2}$$



i due vettori sono paralleli e discordi; la loro somma ha la direzione di \vec{g}' .

PROBLEMA 4



Con i dati del problema, entrambe le forze inerziali (forza centrifuga \vec{f}_{cf} e forza di Coriolis \vec{f}_{co})

sono dirette lungo \hat{u}_p ; hanno quindi una componente "verticale" (parallela ad \vec{f}_g , forza reale di gravità), diretta verso l'alto, ed una componente "orizzontale" diretta verso destra rispetto al moto, cioè verso Sud.

Usando le notazioni del Focardi (paragrafo 5.9) :
indichiamo con \perp le componenti verticali, e con il simbolo \parallel quelle orizzontali :

$$\begin{aligned}
 f_{\perp} &= f_{g\perp} + f_{cf\perp} + f_{co\perp} = \\
 &= mg - (m\omega^2 R \cos\lambda) \cos\lambda - (2m\omega v_0') \cdot \cos\lambda
 \end{aligned}$$

$$f_{\parallel} = (m\omega^2 R \cos\lambda) \sin\lambda + (2m\omega v_0') \sin\lambda$$

la componente ~~non~~ verticale dell'accelerazione e' :

$$a_{\perp} = g - \omega^2 R \cos^2\lambda - 2\omega v_0' \cos\lambda$$

che con i dati del problema e' poco diversa da g :

$$\begin{aligned}
 a_{\perp} &= 9.81 - 1.68 \times 10^{-2} - 1.03 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2 \\
 &= 9.78 \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$

la componente orizzontale dell'accelerazione e' :

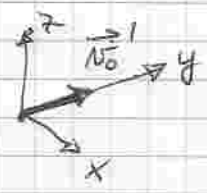
$$\begin{aligned}
 a_{\parallel} &= \omega^2 R \cos\lambda \sin\lambda + 2\omega v_0' \sin\lambda \\
 &= 1.68 \times 10^{-2} + 1.03 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2 \\
 &= 2.71 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$

Nella direzione della velocit  v_0' iniziale il moto si pu  considerare uniforme : la distanza D viene percorsa nel tempo $t = \frac{D}{v_0'}$

Dato il percorso relativamente breve, consideriamo approssimativamente costanti le componenti verticali ed orizzontali dell'accelerazione ; lo spostamento rispetto alle traiettorie rettilinee sar , rispettivamente nelle proiezioni verticale z ed orizzontale laterale x :

$$\Delta z = -\frac{1}{2} a_{\perp} t^2 = -\frac{1}{2} a_{\perp} \frac{D^2}{v_0'^2} = -\frac{1}{2} 9.78 \times 30^2 = -4400 \text{ m}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_{\parallel} t^2 =$$



$$= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda}_{1.68 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2} + 2 \underbrace{\omega v_0' \sin \lambda}_{1.03 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2} \right) \cdot \underbrace{\frac{D^2}{v_0'^2}}_{(30 \text{ s})^2}$$

$$= 12.2 \text{ m}$$

Note: alla velocità non molto elevata ($v_0' = 100 \text{ m/s}$) la distanza $D = 3000 \text{ m}$ viene percorsa in 30 s .

Durante questo tempo lo spostamento verticale risulta molto maggiore della deviazione orizzontale, e la velocità varia significativamente, acquistando una componente verticale di cui bisognerebbe tenere conto.

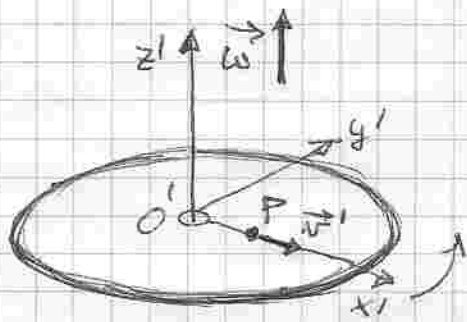
La soluzione è più realistica nel caso in cui v_0' sia significativamente maggiore, p.es. $v_0' = 1000 \text{ m/s}$: si trova allora $a_{\perp} = 9.66 \text{ m/s}^2$, $a_{\parallel} = 0.12 \text{ m/s}^2$

$$\Delta z = -\frac{1}{2} a_{\perp} \frac{D^2}{v_0'^2} = -\frac{1}{2} \times 9.66 \times 3^2 = -43.5 \text{ m}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_{\parallel} \frac{D^2}{v_0'^2} = \frac{1}{2} \times 0.12 \times 3^2 = 0.54 \text{ m}$$

Mentre per $v_0' = 100 \text{ m/s}$ $|\vec{f}_{cf}|$ ed $|\vec{f}_{co}|$ sono dello stesso ordine di grandezza, per velocità maggiori come ad es. $v_0' = 1000 \text{ m/s}$ si ha $|\vec{f}_{co}| \gg |\vec{f}_{cf}|$

PROBLEMA 5



Velocità angolare della ruota: $\vec{\omega} = \omega \hat{k}'$
 la fornice P avanza lungo il raggio della ruota che coincide con l'asse x' in figura. Nel caso in cui avanzi con velocità costante $\vec{v}' = v' \hat{i}'$ le forze agenti sono a risultante nulla nel riferimento non inerziale

- 1) forza peso $m\vec{g} = -mg \hat{k}'$
- 2) reazione normale $\vec{R}_n = R_n \hat{k}' = -m\vec{g}$
- 3) forza centrifuga (inerziale) $\vec{f}_{cf} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = m\omega^2 r \hat{i}'$
- 4) forze di Coriolis (inerziale) $\vec{f}_{co} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = -2m\omega v' \hat{j}'$

le ultime due forze sono dirette orizzontalmente: per avere risultante nulla devono essere equilibrate dalla forza di attrito statico \vec{R}_s :

$$\vec{R}_s = -(\vec{f}_{cf} + \vec{f}_{co})$$

È verosimile che la fornice avanzi lentamente e che quindi le forze di Coriolis sia trascurabile rispetto a quella centrifuga; possiamo anche supporre, per il calcolo del PROBLEMA 6, che la fornice sia in quiete ($\vec{v}' = 0$)

$$|\vec{R}_s| \leq \mu |\vec{R}_n| = \mu mg$$

← massa della fornice

↑ coefficiente di attrito statico

$$|\vec{f}_{cf}| = m\omega^2 r$$

$\Rightarrow r \leq \frac{\mu g}{\omega^2}$ affinché le forze di attrito sia sufficiente a non far scivolare la fornice

per $r > \mu g / \omega^2$: la fornice scivola.