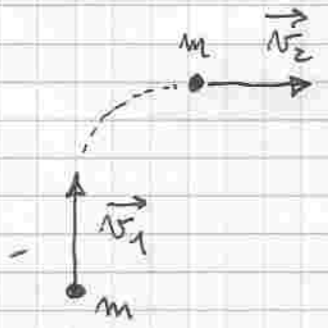
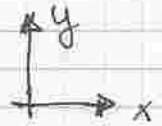
PROBLEMA (1)



$m = 1420$ kg

curva $\begin{cases} \vec{v}_1 = v_0 \, \hat{j} \\ \vec{v}_2 = v_0 \, \hat{i} \end{cases}$ $v_0 = 5.28$ m/s

$(\Delta t = 4.60\,s)$



teorema dell'impulso : curva

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{f}\, dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 =$$

$$= m v_0 \, \hat{i} - m v_0 \, \hat{j}$$

$$J_x = m v_0$$

$$J_y = - m v_0$$

(a) intensità dell'impulso: $|\vec{J}| = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \sqrt{2}\, m v_0 =$

$$= 1.06 \times 10^4 \ N\cdot s$$

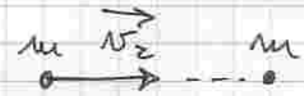
(b) forza media: $\langle \vec{F} \rangle = \dfrac{\vec{J}}{\Delta t}$ => in modulo:

$$|\langle \vec{F} \rangle| = \frac{1.06 \times 10^4}{4.60} = 2.3 \times 10^3 \ N$$

teorema dell'impulso: urto $(\Delta t' = 0.35\,s)$

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t'} \vec{f}\, dt = 0 - m\vec{v}_2 =$$

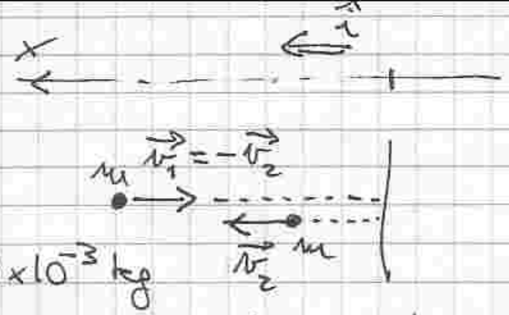
$$= - m v_0 \, \hat{i}$$



(a) intensità dell'impulso: $|\vec{J}| = m v_0 = 7.50 \times 10^3 \ N\cdot s$

(b) forza media: $|\langle \vec{f} \rangle| = \dfrac{|\vec{J}|}{\Delta t'} = \dfrac{7.50 \times 10^3}{0.35} \dfrac{N\cdot s}{s} = 2.14 \times 10^4 N$

PROBLEMA 2



in un tempo $\Delta t = 60\ s$

$n = 100$ proiettili di massa $m = 3 \times 10^{-3}\ kg$

rimbalzano elasticamente

con velocità $v_0 = 500\ m/s$

$$\vec{v}_2 = v_0\,\hat{i}$$
$$\vec{v}_1 = -v_0\,\hat{i}$$

impulso totale (su $\Delta t = 60\ s$):

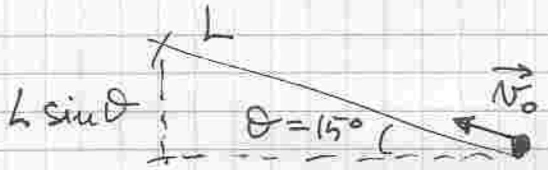
$$\vec{J} = n \cdot 2 m v_0\,\hat{i}$$

$$|\vec{J}| = 100 \times 2 \times 3\times10^{-3} \times 500 = 300\ N\cdot s$$

forza media:

$$|\langle \vec{F} \rangle| = \frac{|\vec{J}|}{\Delta t} = \frac{300\ N\cdot s}{60\ s} = 5\ N$$

PROBLEMA 3



$v_0 = |\vec{v}_0| = 128.7\ km/h =$

$= 35.75\ m/s$

$K_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad K_2 = 0$ (arresto

Per il teorema dell'energia cinetica:

$$\mathcal{L}_{tot} = K_2 - K_1 = 0 - \frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2$$

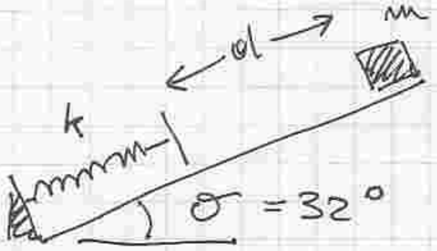
$$\parallel$$

$-\cancel{m}g\,L \sin\theta$ (solo la f. peso fa lavoro, negativo)

$$\Rightarrow L = \frac{v_0^2}{2g \sin\theta} = \frac{(35.75)^2}{2\times 9.81 \times 0.259} = \frac{503}{2}\ m$$

$$\simeq 251\ m$$

PROBLEMA 4

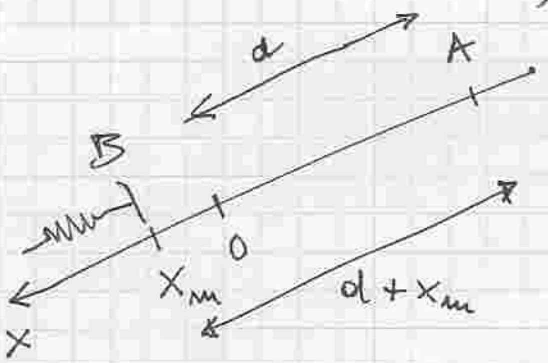


la molla si comprime di
$x = 2.33\ \text{cm} = 2.33 \times 10^{-2}\ \text{m}$
se è sottoposta ad una forza
$F = 268\ \text{N}$

$\Rightarrow$ la costante elastica della molla è

$$k = \frac{F}{x} = 1.15 \times 10^{4}\ \text{N/m}$$

Il blocco di massa $m = 3.18\ \text{kg}$, lasciato scivolare (attrito trascurabile) da fermo per una distanza d lungo il piano inclinato di θ prima di toccare la molla, si ferma istantaneamente dopo averla compressa di una quantità $x_m = 5.48 \times 10^{-2}\ \text{m}$



introdotta un'origine O nella posizione in cui si trova l'estremo libero della molla a riposo, detto A il punto di partenza,
le coordinate del punto di partenza A e del punto di arrivo B sono rispettivamente:

$$x_A = -d \quad , \quad x_B = x_m$$

a) Possiamo applicare il teorema dell'energia cinetica:

$$K_B - K_A = \mathcal{L}_{A \to B}(\text{totale}) = \mathcal{L}_{A \to O}(\text{totale}) + \mathcal{L}_{O \to B}(\text{totale})$$

$K_A = K_B = 0$ (velocità iniziale e finale nulle)

nel tratto $A \to O$: contribuisce solo la forza peso

" " $O \to B$: contribuiscono la forza peso e la forza elastica

$$\Rightarrow \quad 0 = \mathcal{L}_{A\to O} + \mathcal{L}_{O\to B}$$

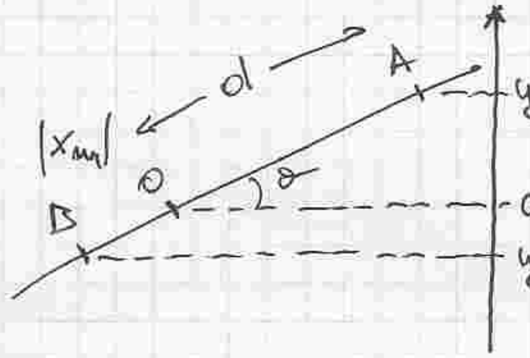
$$= \underbrace{mg\,d\sin\theta + mg\,x_m\sin\theta}_{\text{lavoro positivo, f. di gravità}} + \underbrace{\left(-\frac{k}{2}x_m^2\right)}_{\text{lavoro negativo, f. elastica}}$$

$$\int_0^{x_m}(-kx)\,dx$$

$\Rightarrow$ distanza totale percorsa da A a B:

$$d + x_m = \frac{k x_m^2}{2mg\sin\theta} = 1.05\ \text{m}$$

a') Lo stesso risultato si ottiene con la conservazione dell'energia meccanica, introducendo p. esempio una coordinata verticale y come in figura:



	V_g	V_e
$y_A = d\sin\theta$	$mg\,y_A$	0
0	0	0
$y_B = -\lvert x_m\rvert\sin\theta$	$mg\,y_B$	$\frac{1}{2}k x_m^2$

Con la scelta delle costanti arbitrarie per l'energia potenziale gravitaz. V_g ed elastica V_e indicate sopra, si ha:

in A: $E_A = K_A + V_{gA} + V_{eA} =$
$\qquad = 0 + mg\,d\sin\theta + 0$

in B: $E_B = K_B + V_{gB} + V_{eB} =$
$\qquad = 0 - mg\lvert x_m\rvert\sin\theta + \frac{1}{2}k x_m^2$

$$E_A = E_B \Rightarrow mg\,d\sin\theta = -mg\lvert x_m\rvert\sin\theta + \frac{1}{2}k x_m^2$$

$$\Rightarrow d + \lvert x_m\rvert = \frac{k x_m^2}{2mg\sin\theta} = 1.05\ \text{m}$$

b) possiamo trovare la velocità v_0 nel punto O applicando ancora la conservazione dell'energia meccanica, per esempio tra O e B:

$$\text{in O}: \quad E_0 = K_0 + V_{g,0} + V_{e,0} =$$

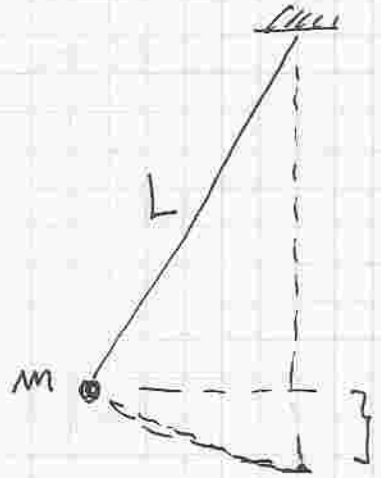
$$= \frac{1}{2} m v_0^2 + 0 + 0$$

$$E_0 = E_B \implies \frac{1}{2} m v_0^2 = - mg\,|x_m| \sin\theta + \frac{1}{2} k x_m^2$$

$$\implies v_0 = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2} k x_m^2 - mg\,|x_m| \sin\theta\right)} =$$

$$= 3.21 \ m/s$$

PROBLEMA 5



$L = 15.24\ m$

$m = 81.63\ kg$

$\Delta y = 2.60\ m$

la tensione della liana nel punto più basso della traiettoria circolare dev'essere tale da fornire l'accelerazione centripeta necessaria (quella tangenziale è nulla nel punto più basso)

$$\vec{F}_{tot} = \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[T + (-mg)\right]\hat{j} = m\frac{v^2}{L}\hat{j}$$

$$T = mg + m\frac{v^2}{L}$$

la tensione è tanto maggiore quanto maggiore è la velocità scalare nel punto considerato; troviamo la velocità utilizzando il teorema dell'energia cinetica oppure la conservazione dell'energia meccanica; comunque si trova

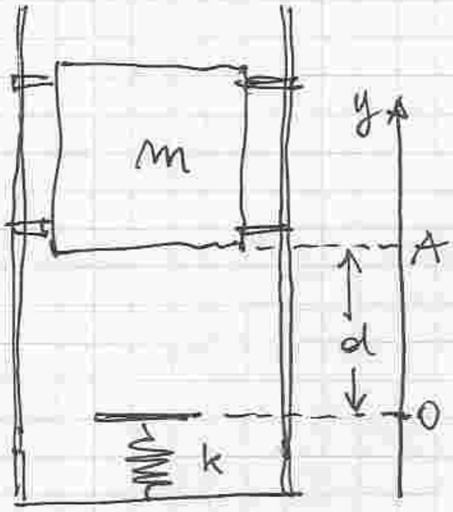
$$v = \sqrt{2g\,\Delta y}$$

da cui: $T = mg + m\dfrac{2g\,\Delta y}{L} = mg\left(1 + \dfrac{2\,\Delta y}{L}\right)$

$= 1073\ N$

che è inferiore al carico di rottura $(1100\ N)$: la liana non dovrebbe spezzarsi ...!

PROBLEMA 6



$m = 1814 \ kg$

$d = 3.66 \ m$

$k = 1.46 \times 10^5 \ N/m$

sistema frenante : forza d'attrito

$|F_a| = 4448 \ N$

dissipa un'energia 4448 J per ogni percorso unitario (un metro)

(a) velocità dell'ascensore poco prima di toccare le molle?
introduciamo un sistema di riferimento con asse y diretto verticalmente verso l'alto ed origine corrispondente all'estremità libera delle molle a riposo.

conservazione dell'energia meccanica?
no, c'è la forza d'attrito non conservativa!
⟹ usiamo il teorema dell'energia cinetica.

posizione iniziale : A : $y_A = d$
posizione finale : 0 : $y_0 = 0$

$$K_0 - K_A = \mathcal{L}_{tot} = \underbrace{\mathcal{L}_{cons.}}_{\substack{\text{gravità} \\ >0}} + \underbrace{\mathcal{L}_{non\ cons.}}_{\substack{\text{f. attrito} \\ <0}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \underbrace{\cancel{\frac{1}{2} m v_A^2}}_{v_A = 0} = mgd - |F_a| \cdot d \qquad (1)$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2d}{m}\left(mg - |F_a|\right)} = 7.3 \ m/s$$

(b) di quanto viene compressa la molla?

		K	V_g	V_{el}
0		$\frac{1}{2} m v_0^2$	0	0
y_{min}	B	0	$m g y_{min} < 0$	$\frac{1}{2} k y_{min}^2$

devo determinare la coordinata y_{min} del punto B (<0 nel riferimento scelto) per cui si annulla la velocità, e quindi l'energia cinetica. Per il teorema dell'energia cinetica

$$K_B - K_0 = \mathcal{L}_{0\to B}(\text{tot.}) =$$

$$= \underbrace{\mathcal{L}_{0\to B}(\text{gravità})}_{>0} + \underbrace{\mathcal{L}_{0\to B}(\text{f.el.})}_{<0} + \underbrace{\mathcal{L}_{0\to B}(\text{attrito})}_{<0}$$

$$= -\left(V_{gB} - V_{g0}\right) - \left(V_{eB} - V_{e0}\right) \underbrace{- |F_a| \cdot |y_{min}|}_{<0}$$

$$\Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \underbrace{-\left(m g y_{min} - 0\right)}_{>0} \underbrace{-\left(\frac{1}{2} k y_{min}^2 - 0\right)}_{<0} + \underbrace{|F_a| \cdot y_{min}}_{<0}$$

attenzione ai segni!

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k y_{min}^2 + \left(m g - |F_a|\right) y_{min} - \underbrace{\frac{1}{2} m v_0^2}_{\text{vedi (1)}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k y_{min}^2 + \left(m g - |F_a|\right) y_{min} - \left(m g - |F_a|\right) d = 0$$

$$\Rightarrow y_{min}^2 + \frac{2\left(m g - |F_a|\right)}{k} y_{min} - \frac{2\left(m g - |F_a|\right)}{k} d = 0$$

soluzione fisica $(y_{min} < 0)$:

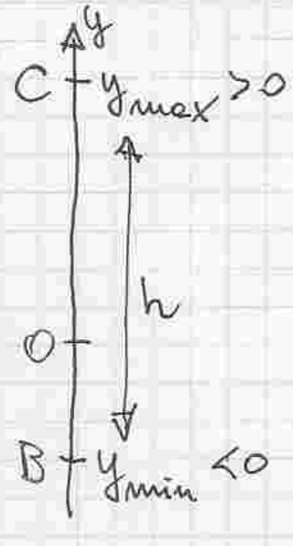
$$y_{min} = -\frac{mg-|F_a|}{k} - \sqrt{\frac{(mg-|F_a|)^2}{k^2} + \frac{2(mg-|F_a|)d}{k}} =$$

$$= -\frac{mg-|F_a|}{k}\left(1+\sqrt{1+\frac{2kd}{(mg-|F_a|)}}\right) =$$

$$= -0.91\ m$$

l'altra soluzione, positiva, corrisponderebbe alla molla allungata, ma non e' fisica perche' l'ascensore si stacca dalla molla per $y > 0$.

(c) altezza massima alla quale l'ascensore rimbalza:



	K	V_g	V_e
C	0	$mg\,y_{max}$	0
B	0	$mg\,y_{min}$	$\frac{1}{2}k y_{min}^2$

teorema dell'energia cinetica tra B e C :

$$K_C - K_B = 0 = \mathcal{L}_{BC}(\text{gravita'}) + \mathcal{L}_{BC}(\text{f.el.}) + \mathcal{L}_{BC}(\text{attrito})$$

$$= \underbrace{-\left(V_{gC}-V_{gB}\right)}_{<0} \underbrace{-\left(V_{eC}-V_{eB}\right)}_{>0} \underbrace{-|F_a|\left(y_{max}-y_{min}\right)}_{<0}$$

$$= -mg\left(y_{max}-y_{min}\right) - \left(0-\frac{1}{2}k y_{min}^2\right) - |F_a| \cdot \left(y_{max}-y_{min}\right)$$

Chiamando h il dislivello tra B e C

$$h = y_{max} - y_{min} > 0$$

$$0 = -mgh + \frac{1}{2} k y_{min}^2 - |F_a| h$$

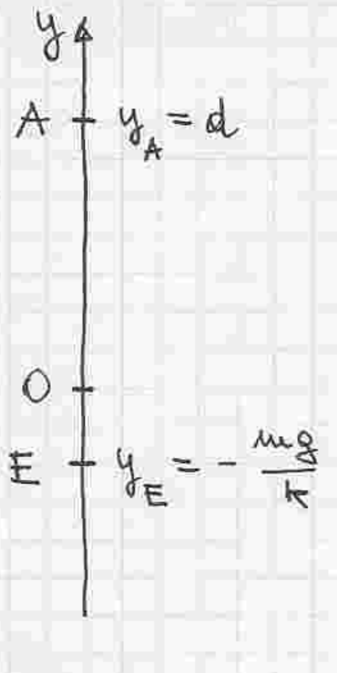
$$\Rightarrow h = \frac{k y_{min}^2}{mg + |F_a|} = 2.73 \text{ m}$$

oppure, nelle coordinate scelte, C è individuato da:

$$y_c = y_{max} = y_{min} + h = (-0.91 + 2.73) \text{ m} =$$

$$= 1.82 \text{ m}$$

(d) Distanza totale approssimata percorsa dall'ascensore prima di fermarsi



Si può ipotizzare che la posizione d'arresto, essendo le oscillazioni smorzate dagli effetti dissipativi, sia quella E in cui la risultante della f. peso e della f. elastica è nulla:

$$\vec{w} + \vec{F}_e = 0$$

$$(-mg) + (-k y_E) = 0$$

$$y_E = -\frac{mg}{k}$$

Essendo in quiete ($K=0$) l'ascensore in A ed E, si può facilmente calcolare l'energia meccanica dissipata:

posizione iniziale:

$$A: E_A = K_A + V_{gA} + V_{eA} = 0 + mgd + 0$$

equilibrio finale:

$$E: E_E = K_E + V_{gE} + V_{eE} = 0 + mg\,y_E + \frac{1}{2} k y_E^2 = 0 + \left(-\frac{m^2 g^2}{k}\right) + \frac{1}{2} \cancel{k} \frac{m^2 g^2}{k^{\cancel{2}}} = -\frac{1}{2}\frac{m^2 g^2}{k}$$

l'energia meccanica dissipata e':

$$\Delta E = E_E - E_A = -\frac{1}{2} m^2 g^2/k - mgd < 0$$

questo corrisponde al lavoro negativo della forza di attrito F_a sulla distanza percorsa totale s:

$$-|F_a| \cdot s = -\frac{1}{2} m^2 g^2/k - mgd$$

$$\Longrightarrow \quad s = \frac{1}{|F_a|}\left(\frac{m^2 g^2}{2k} + mgd\right) = \frac{mg}{|F_a|}\left(\frac{mg}{2k} + d\right) = 14.9\ \text{m}$$

(dimensioni: OK!
lunghezza)

Il risultato e' approssimato perche':

(a) non tiene conto di effetti dissipativi nelle deformazioni della molla

(b) l'arresto puo' avvenire prima che la posizione E sia raggiunta, se il coefficiente d'attrito statico e' sufficiente a mantenere l'ascensore fermo quando la velocita' si annulla in uno dei punti di inversione del moto.