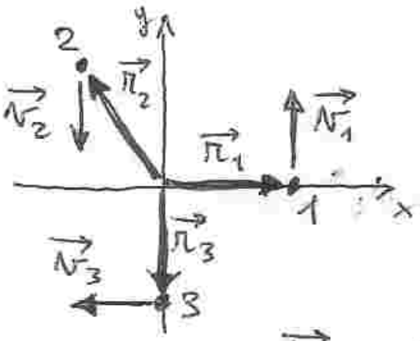
ESERCIZI E PROBLEMI - SOLUZIONI - SETTIMANE 12, 13, 14

Dinamica dei sistemi di particelle

PROBLEMA 1



		[m]	[m/s]
$m_1 = 0.10$ kg		$\vec{r}_1 = (0.20, 0.00, 0.00)$	$\vec{v}_1 = (0.0, 1.0, 0.0)$
$m_2 = 0.20$ kg		$\vec{r}_2 = (-0.10, 0.20, 0.00)$	$\vec{v}_2 = (0.0, -1.0, 0.0)$
$m_3 = 0.30$ kg		$\vec{r}_3 = (0.00, -0.20, 0.00)$	$\vec{v}_3 = (-1.0, 0.0, 0.0)$

$$\vec{r}_c = x_c \hat{i} + y_c \hat{j} + z_c \hat{k}$$

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{0.10 \times 0.20 + 0.20 \times (-0.10) + 0.30 \times 0.00}{0.10 + 0.20 + 0.30} = 0.00 \text{ m} \\ y_c = \dfrac{0.10 \times 0.00 + 0.20 \times 0.20 + 0.30 \times (-0.20)}{0.10 + 0.20 + 0.30} = -\dfrac{0.020}{0.60} = -0.033 \text{ m} \\ z_c = 0.00 \text{ m} \end{cases}$$

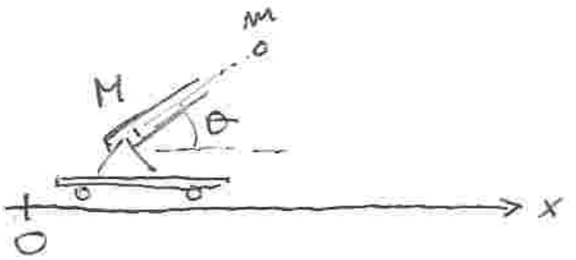
$$\vec{v}_c = v_{xc} \hat{i} + v_{yc} \hat{j} + v_{zc} \hat{k}$$

$$v_{xc} = \frac{0.30 \times (-1.0)}{0.60} = -0.5 \text{ m/s}$$

$$v_{yc} = \frac{0.10 \times 1.0 + 0.20 \times (-1.0)}{0.60} = -\frac{0.10}{0.60} = -0.17 \text{ m/s}$$

$$v_{zc} = 0.00 \text{ m/s}$$

PROBLEMA 2



Sistema = cannoncino + proiettile

$M = 1{,}0$ kg

$m = 0{,}10$ kg $v_0 = 10$ m/s

$\theta = 30°$

Durante l'espulsione del proiettile il centro di massa del sistema si sposta verso l'alto; la componente verticale delle forze esterne è diversa da zero. Mentre la forza di gravità ha impulso trascurabile nel breve intervallo di tempo, la reazione vincolare del piano è impulsiva e determina l'accelerazione non nulla del centro di massa. In assenza di attriti, però, la componente orizzontale della forza esterna risultante è nulla, quindi si conserva la componente orizzontale della quantità di moto totale.

$$F_x^{(e)} = 0 \implies Q_x = \text{cost.} = 0$$ (sistema inizialmente in quiete)

Dopo il lancio del proiettile, indichiamo rispettivamente con V_x e v_x le componenti orizzontali delle velocità di cannoncino e proiettile nel riferimento (Ox).

Se v_0 è il modulo della velocità del proiettile relativa al cannoncino:

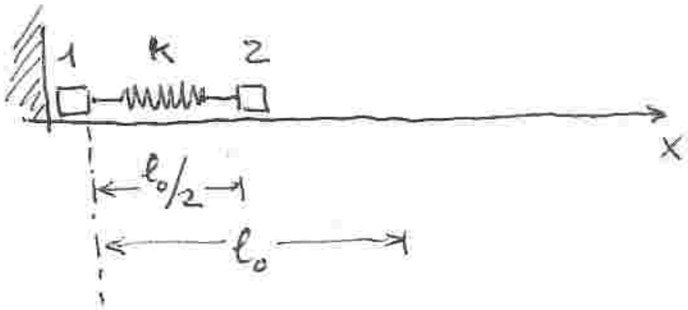
$$\begin{cases} v_0 \cos\theta = v'_x & \text{componente } x \text{ relativa al cannoncino} \\ v_x = V_x + v'_x = V_x + v_0\cos\theta & \text{componente } x \text{ relativa ad } (Ox) \end{cases}$$

$$Q_x = 0 = MV_x + mv_x = MV_x + mV_x + mv_0\cos\theta$$

$$\implies V_x = -\frac{mv_0\cos\theta}{M+m} = -0{,}79 \text{ m/s}$$

(velocità del cannoncino che rincula orizzontalmente)

PROBLEMA 3



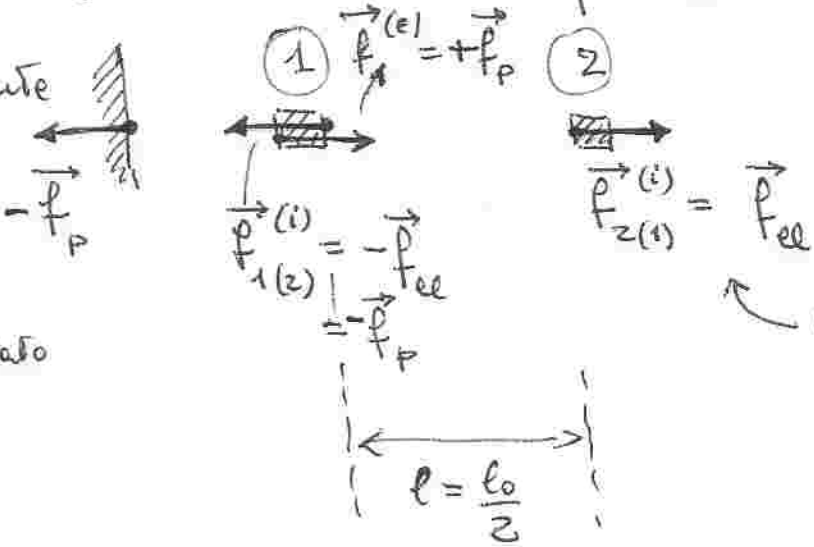
$m_1 = m_2 = m = 0{,}10$ kg

$k = 100$ N/m ; l_0 lunghezza a riposo

$\left.\begin{array}{l} v_{1i} = v_{2i} = 0 \\ l_i = l_0/2 \end{array}\right\}$ inizialmente

Descrizione qualitativa del moto ed analisi delle forze agenti (consideriamo solo componenti lungo x)

1) inizialmente (sistema in quiete, appena il corpo 2 viene lasciato libero)



[diagramma di corpo libero]

questa forza viene equilibrata da chi trattiene il corpo 2 fino a quando viene lasciato libero

il corpo 1 è sottoposto a forza totale nulla:

$$\vec{f}_1^{(e)} + \vec{f}_{1(2)}^{(i)} = 0 \qquad |\vec{f}_1^{(e)}| = |\vec{f}_p| = |\vec{f}_{el}| = |k(l - l_0)| = k\frac{l_0}{2}$$

il corpo 2 è sottoposto a:

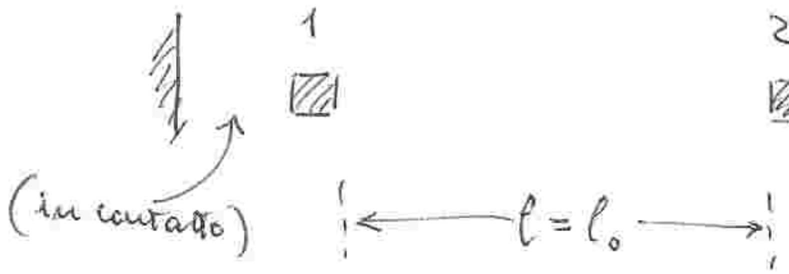
$$\vec{f}_{2(1)}^{(i)} \neq 0 \qquad |\vec{f}_{2(1)}^{(i)}| = |\vec{f}_{el}| = k\frac{l_0}{2}$$

2) Il corpo 1 rimane in quiete, ed il corpo 2 viene accelerato, fino a quando $l = l_0$ $\left(\Rightarrow |\vec{f}_{el}| = |k(l-l_0)| = 0\right)$;
la configurazione delle forze non cambia, ma le forze diventano tutte progressivamente meno intense

$$\frac{l_0}{2} < l < l_0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{f}_{el}| = k|l - l_0| \text{ diminuisce progressivamente}$$

In questa fase la risultante delle f. esterne è diversa da zero: $\vec{f}_1^{(e)} \neq 0$

3) per $l = l_0$: le forze si annullano tutte!



$$|\vec{f}_p| = |\vec{f}_1^{(e)}| = |\vec{f}_{el}| = k\,|l_0 - l_0| = 0 = |\vec{f}^{(i)}_{1(2)}| = |\vec{f}^{(i)}_{2(1)}|$$

4) per $l > l_0$: la molla è allungata, quindi applica una forza positiva su 1, che si stacca dalla parete ($\Rightarrow \vec{f}_1^{(e)} = 0$: la risultante delle f. esterne rimane nulla) ~~che~~
ed una forza negativa su 2, che rallenta

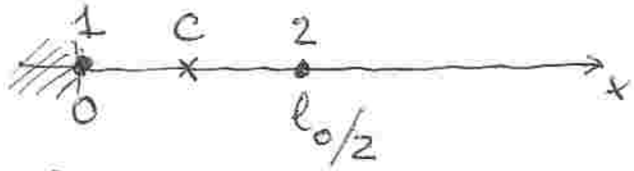
$$\vec{f}^{(i)}_{1(2)} = -\vec{f}_{el} = -\vec{f}^{(i)}_{2(1)}$$

5) Data l'inerzia delle due masse, esse continuano ad oscillare con forze interne alternativamente "attrattive" (quando $l > l_0$) e "repulsive" ($l < l_0$)

Passiamo adesso alla soluzione quantitativa.

a) moto del centro di massa

$t=0$: posizione iniziale :



$$x_C(0) = \frac{\ell_0}{4}$$

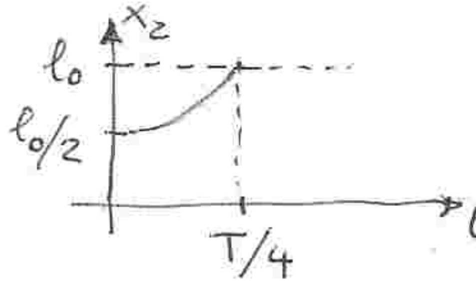
$x_1(0) = 0 \qquad x_2(0) = \ell_0/2$

a1) durante la prima fase del moto (1 in contatto con la parete) possiamo considerare un sistema ridotto alla massa 2, per il quale la forza elastica è "esterna": dal primo principio e dalle condizioni iniziali si può ottenere :

$$f^{(i)}_{2(1)} = m a_2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -k\left[(x_2 - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{x_1}}) - \ell_0\right] = m \dfrac{d^2x_2}{dt^2} \\ x_2(0) = \ell_0/2 \\ v_2(0) = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow x_2(t) = \ell_0\left[1 - \frac{1}{2}\cos\omega t\right]$$



valida per $t < T/4$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

durante questa fase del moto la posizione del c.m. è (essendo $x_1(t) \equiv 0$)

$$x_c(t) = \frac{x_2(t)}{2}$$

Allo stesso risultato si può arrivare considerando direttamente il teorema del moto del centro di massa, determinato dalla risultante delle forze esterne:

$$F^{(e)}_x = M a_{cx}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_p = f_{el} = -k\left[(\underset{2x_c}{\underset{\shortparallel}{x_2 - x_1}}) - \ell_0\right] = (2m)\dfrac{d^2x_c}{dt^2} \\ x_c(0) = \dfrac{\ell_0}{4} \\ v_c(0) = 0 \end{array} \right.$$

La velocità finale del centro di massa, quando $\ell = \ell_0$, si può trovare sia derivando la legge oraria $x_c(t)$ per $t = \frac{T}{4}$, sia più semplicemente dalla conservazione dell'energia meccanica del sistema, dato che il sistema è conservativo

(NB: osserviamo che la forza esterna esercitata dalla parete, pur determinando il moto del centro di massa, non compie lavoro, dato che il suo punto di applicazione non si sposta. La variazione di energia cinetica del sistema è determinata in questo caso dal lavoro delle forze interne, cioè della forza elastica!)

$$E_{Mi} = E_{Mf} \qquad E = V + K = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$$\frac{1}{2}k\left(\frac{\ell_0}{2}-\ell_0\right)^2 + 0 = \cancel{\underbrace{\frac{1}{2}k(\ell_0-\ell_0)^2}_{0}} + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

$v_{1i} = v_{2i} = 0$ (velocità iniziali)

$v_{1f} = 0$

$v_{2f} = 2v_{cf}$ $\left(v_{cf} = \frac{v_{2f}}{2}\right)$ (velocità finali)

$m_1 = m_2 = m$

$$\cancel{\frac{1}{2}}k\frac{\ell_0^2}{4} = \cancel{\frac{1}{2}}m \cdot 2^2 v_{cf}^2$$

$\Rightarrow$ velocità finale del CM: $v_{cf} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}\,\ell_0 = \frac{\omega \ell_0}{4} = \ldots$

Nella seconda fase del moto, dopo il distacco del corpo 1 dalla parete, v_c resta costante, essendo nulla la risultante delle forze esterne.

NB. Allo stesso risultato si arriva con una diversa espressione dell'energia cinetica finale, infatti:

$v_{1f} = 0$ $\qquad$ $v_{cf} = \dfrac{v_{2f}}{2}$ $\qquad$ $v_{2f} = 2v_{cf}$

1 $\qquad$ C $\qquad$ 2 $\qquad$ riferimento (Ox)

v'_{1f} $\qquad$ $v'_{cf} = 0$ $\qquad$ v'_{2f}

1 $\qquad$ C $\qquad$ 2 $\qquad$ riferimento del CM

nel riferimento del CM:

$$v'_{cf} = v_{cf} - v_{cf} = 0$$

$$v'_{1f} = v_{1f} - v_{cf} = -v_{cf} = -\frac{v_{2f}}{2}$$

$$v'_{2f} = v_{2f} - v_{cf} = 2v_{cf} - v_{cf} = v_{cf} = \frac{v_{2f}}{2}$$

l'energia cinetica totale finale si può esprimere in due modi equivalenti:

$$K_f = \cancel{\frac{1}{2} m v_{1f}^2}_{\,0} + \frac{1}{2} m v_{2f}^2 = \frac{1}{2} m \left(2 v_{cf}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot m \cdot v_{cf}^2$$

oppure, usando la nota scomposizione e le velocità relative al centro di massa:

$$K_f = \frac{1}{2} \underbrace{(2m)}_{\text{massa totale}} v_{cf}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m v'^2_{1f} + \frac{1}{2} m v'^2_{2f}}_{\text{velocità relative al c.m.}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m \cdot v_{cf}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{cf}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{cf}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot m \cdot v_{cf}^2$$

come ci aspettavamo dal teorema noto.

c) dopo il distacco dalla parete, il moto può essere descritto come:

c1) moto rettilineo uniforme del CM, con velocità costante $v_c = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}\, l_0$

c2) moto oscillante delle due masse, che relativamente al centro di massa hanno sempre velocità opposte (essendo $m_1 = m_2 = m$)

$K' = 0$

$v_1' = 0$ $\quad v_2' = 0$

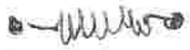
allungamento massimo $l = l_0 + \frac{l_0}{2}$

$K' = \max.$

v_1' $\quad v_2' = -v_1'$

lunghezza a riposo $l = l_0$

$K' = 0$



$v_1' = 0$ $\quad v_2' = 0$

massima compressione $l = \frac{l_0}{2}$

⟹ Ne segue che l'energia cinetica oscilla fra un valore minimo (quando $v_1' = v_2' = 0$) $\quad K_{min} = \frac{1}{2}(2m)v_c^2$

ed un valore massimo, quando le velocità relative al centro di massa sono massime (per $l = l_0$):

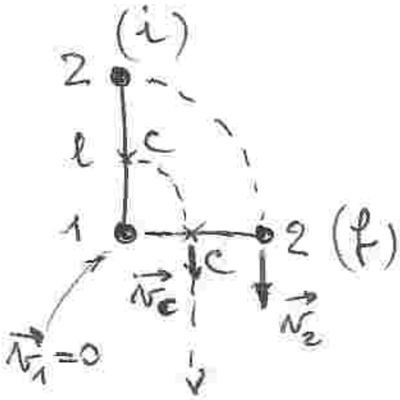
$$K_{max} = \frac{1}{2}(2m)v_c^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m v_1'^2 + \frac{1}{2}m v_2'^2}_{K' \text{ massimo}:\ \frac{1}{2}(2m)v_c^2} = 2K_{min}$$

L'energia meccanica totale resta costante.

vedi valori trovati in precedenza per $l = l_0$

$$\begin{cases} v_1' = v_{1f}' = -v_c \\ v_2' = v_{2f}' = v_c \end{cases}$$

PROBLEMA 4



a) in assenza di attrito, si conserva l'energia meccanica totale, alla quale il corpo 1 non contribuisce

$$E_{Mi} = E_{Mf} \qquad ; E_M = K + V$$

$$0 + \cancel{m}gl = \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2 + 0$$

$$v_2 = \sqrt{2gl}$$ (diretta verticalmente verso il basso)

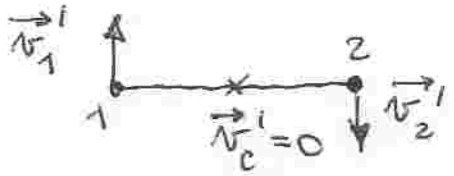
corrispondentemente: $$v_c = \frac{m \cdot 0 + m v_2}{2m} = \frac{v_2}{2}$$ (diretta verticalmente verso il basso)

$$= \frac{\sqrt{2gl}}{2} = \sqrt{\frac{gl}{2}}$$

Lo stesso risultato si può ottenere considerando direttamente il moto del centro di massa C:

$$0 + (\cancel{2}m)\, g\, \frac{l}{\cancel{2}} = \frac{1}{2}(2m)v_c^2 + \frac{1}{2}m v_1'^2 + \frac{1}{2}m v_2'^2 + 0$$

dove le velocità relative al CM sono:



$$\vec{v}_c' = \vec{v}_c - \vec{v}_c = 0$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_c = 2\vec{v}_c - \vec{v}_c = \vec{v}_c$$

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_c = 0 - \vec{v}_c = -\vec{v}_c$$

da cui:

$$\cancel{m}gl = \frac{1}{2}(2m)v_c^2 + \frac{1}{2}m v_c^2 + \frac{1}{2}m v_c^2 = \frac{1}{\cancel{2}}(\overset{2}{\cancel{4}}\cancel{m})v_c^2$$

$$\Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{gl}{2}} = 0.70 \text{ m/s}$$

PROBLEMA 4

(b)

In assenza di vincoli esterni, il moto successivo del CM è dato da:

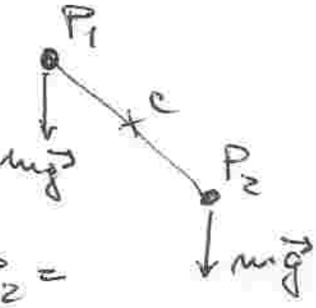
$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}^{(e)} = (2m)\,\vec{a}_c \\ \quad \shortparallel \\ m\vec{g} + m\vec{g}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a}_c = \vec{g}$$

moto uniformemente accelerato lungo la verticale (caduta libera, accel. $\vec{g}$)

Essendo nullo il momento risultante delle forze esterne, per esempio rispetto al CM C preso come polo:

$$\vec{M}_c^{(e)} = CP_1 \times m\vec{g} + CP_2 \times m\vec{g} =$$

$$= (CP_1 - CP_1) \times m\vec{g} = 0$$

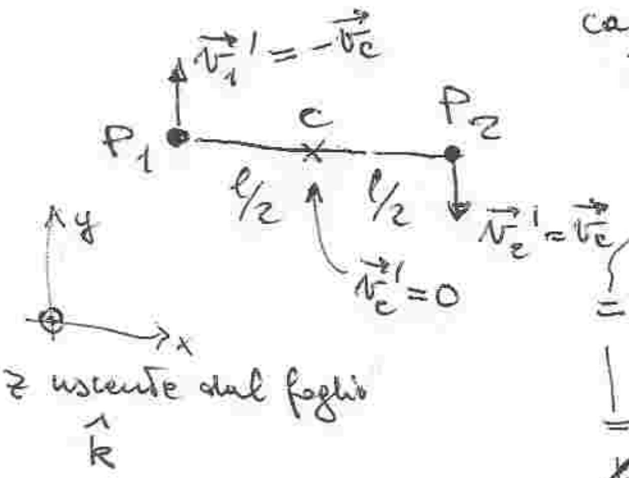


$CP_2 =$
$= -CP_1$

si conserva il momento angolare totale rispetto a C, quindi essendo le due masse rigidamente collegate, si avrà rotazione a velocità angolare costante, infatti:

$$\vec{M}_c^{(e)} = 0 \Rightarrow \vec{P}_c = \vec{P}_c\,' = \text{costante} \ \text{~~da~~}$$

calcoliamo il momento angolare nell'istante in cui l'asta è orizzontale:



$$\vec{P}_c\,' = CP_1 \times m\vec{v}_1\,' + CP_2 \times m\vec{v}_2\,' =$$

$$= -m v_c \frac{\ell}{2}\hat{k} - m v_c \frac{\ell}{2}\hat{k} =$$

$$= -m v_c \ell\, \hat{k}$$

da cui cinematicamente troviamo

$$\omega = \frac{v_c}{\ell/2} = \frac{2v_c}{\ell} = \text{cost.} = 14 \text{ rad/s}$$

(dove $v_c = \sqrt{\frac{g\ell}{2}}$ già trovato)

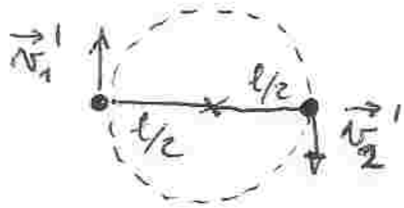
NB Allo stesso risultato si arriva considerando il sistema come un corpo rigido, che ruota attorno a C con:

momento d'inerzia I_C

e momento angolare $I_C \omega = P_C$

dove: $I_C = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \cancel{2} m \frac{l^2}{\cancel{4}} = \frac{1}{2} m l^2$

momento angolare (in modulo)



$$P_C = I_C \omega = \frac{1}{\cancel{2}} m l^{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2} v_C}{\cancel{l}} = m v_C l$$

$$v_1' = v_2' = \omega \cdot \frac{l}{2}$$

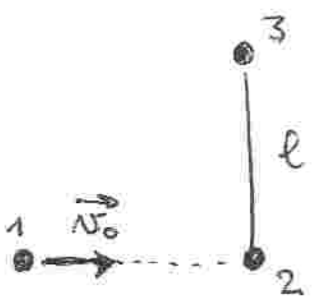
$$\Rightarrow \omega = \frac{v_1'}{l/2} = \frac{v_2'}{l/2} = \frac{v_C}{l/2} = \frac{2 v_C}{l}$$

OK, in accordo con quanto già trovato.

Essendo nota la velocità del CM già determinata $\left(v_C = \sqrt{\frac{gl}{2}}\right)$ possiamo ricavare la velocità angolare di rotazione, che sarà anch'essa costante:

$$\omega = \frac{2 v_C}{l} = \frac{P_C}{I_C} = 14 \text{ rad/s} = \text{cost.}$$

PROBLEMA 5



$$m_1 = m_2 = m_3 = m$$

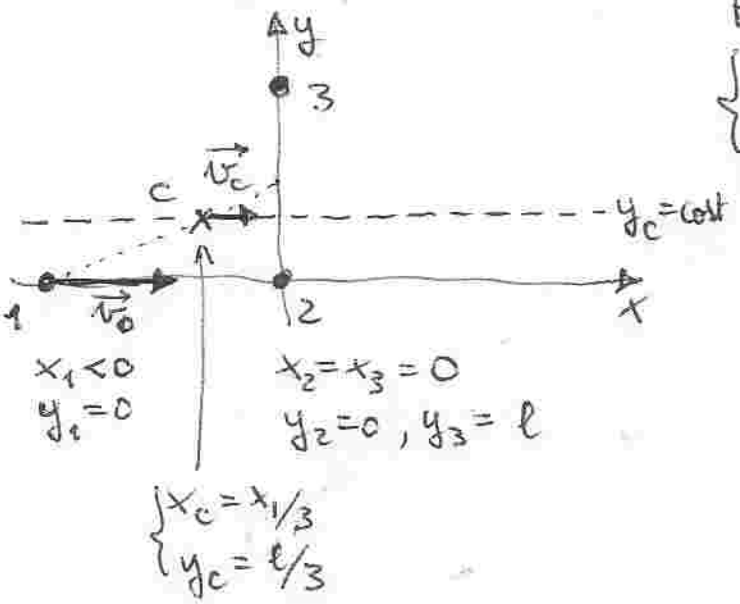
(a) essendo nulla la forza esterna risultante, il centro di massa si muove a velocità costante:

$$\vec{F}^{(e)} = 0 \Rightarrow \vec{a}_c = 0 \Rightarrow \vec{Q} = (3m)\vec{v}_c = \text{cost.}$$

dove $\vec{v}_c$ si può facilmente calcolare prima dell'urto:

$$\vec{v}_c = \frac{0 \cdot m + 0 \cdot m + m\vec{v}_0}{3m} = \frac{\vec{v}_0}{3}$$

$\Rightarrow$ il CM si muove di moto rettilineo uniforme: introducendo un sistema di riferimento come in figura, si trova:



prima dell'urto

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{m x_1}{3m} = \dfrac{x_1}{3} \\ y_c = \dfrac{m\ell}{3m} = \dfrac{\ell}{3} = \text{cost.} \end{cases}$$

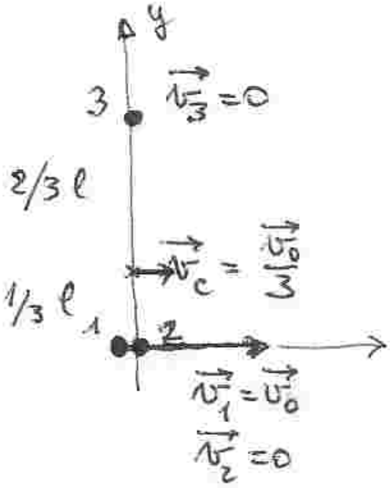
dopo l'urto
il moto del CM prosegue immutato con velocità

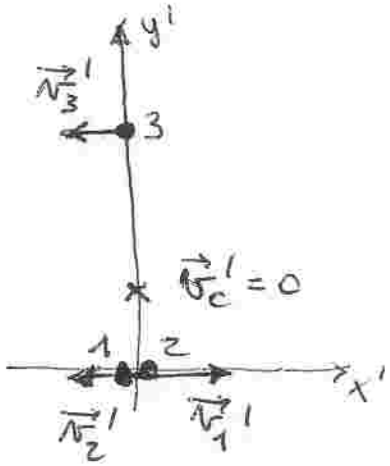
$$\vec{v}_c = \frac{\vec{v}_0}{3}$$

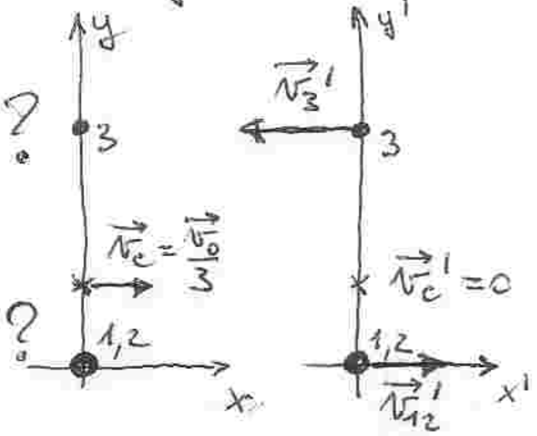
(b) moto relativo al CM, dopo l'urto:

"subito prima" ⟶ "subito dopo"

riferim. Oxy — relativo a C — riferim. Oxy — relativo a C







$$\begin{cases} \vec{v}_1{}' = \vec{v}_1 - \vec{v}_c = \frac{2}{3}\vec{v}_0 \\ \vec{v}_2{}' = \vec{v}_2 - \vec{v}_c = -\vec{v}_0/3 \\ \vec{v}_3{}' = \vec{v}_3 - \vec{v}_c = -\vec{v}_0/3 \end{cases}$$

corpo rigido che ruota attorno a C:

velocità angolare $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$

modulo della velocità relativa dei corpi 1 e 2 e del corpo 3:

$$\begin{cases} v_{12}{}' = \omega \frac{\ell}{3} \\ v_3{}' = \omega \frac{2}{3}\ell \end{cases}$$

$$\vec{P}_c = CP_1 \times m\vec{v}_1 + CP_2 \times m\vec{v}_2 + CP_3 \times m\vec{v}_3 = \frac{\ell}{3} m v_0 \hat{k}$$

$$\vec{P}_c{}' = CP_1 \times m\vec{v}_1{}' + CP_2 \times m\vec{v}_2{}' + CP_3 \times m\vec{v}_3{}' = \left(\frac{\ell}{3} m \frac{2}{3}v_0 + \frac{\ell}{3} m \left(-\frac{v_0}{3}\right) + \frac{2}{3}\ell\, m \frac{v_0}{3}\right)\hat{k} = \frac{\ell}{3} m v_0\, k$$

momento angolare:

$$\vec{P}_c{}' = CP_{12} \times 2m\vec{v}_{12}{}' + CP_3 \times m\vec{v}_3{}' = \frac{\ell}{3} \cdot 2m \cdot \omega \frac{\ell}{3} + \frac{2}{3}\ell \cdot m \cdot \omega \frac{2}{3}\ell = \underbrace{\left[2m\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 + m\left(\frac{2\ell}{3}\right)^2\right]}_{I_c}\omega$$

come ci aspettavamo:

$$\begin{cases} \text{inizialmente: } \vec{P}_c = \vec{P}_c{}' = m v_0 \frac{\ell}{3}\hat{k} \\ \text{alla fine: } \vec{P}_c{}' = I_c\, \omega\, \hat{k} \end{cases}$$

con $I_c = 2m\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 + m\left(\frac{2\ell}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} m \ell^2$

Eguagliando il momento angolare iniziale a quello finale:

$$m v_0 \frac{l}{3} = I_c \omega \qquad , \; I_c = \frac{2}{3} m l^2$$

da cui:

$$\omega = \frac{v_0}{2l} = \text{cost.}$$

che è la velocità angolare costante del moto rotatorio attorno al CM dopo l'urto.

NB Si verifica facilmente che nell'urto una parte dell'energia cinetica viene dissipata, in quanto:

$$K_i = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}(3m)\underbrace{\left(\frac{v_0}{3}\right)^2}_{v_c} + \frac{1}{2} \underbrace{I_c}_{\frac{2}{3}ml^2} \underbrace{\omega^2}_{\frac{v_0}{2l}} = \frac{1}{4} m v_0^2$$

$$\Rightarrow K_f = \frac{1}{2} K_i < K_i$$

nell'urto è stata dissipata $\Delta K = K_f - K_i < 0$

PROBLEMA 6

energia potenziale gravitazionale

$$V = \sum_i V_i = \sum_i m_i g z_i = \left(\sum_i m_i z_i\right) g =$$

$$= \underbrace{\left(\sum_i m_i\right)}_{M} z_c g \qquad z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

$\Rightarrow$ si può usare l'espressione: $V(z_c) = M g z_c$

dove $M = \sum_i m_i$ è la massa totale del sistema di punti materiali e z_c è la coordinata verticale del centro di massa.