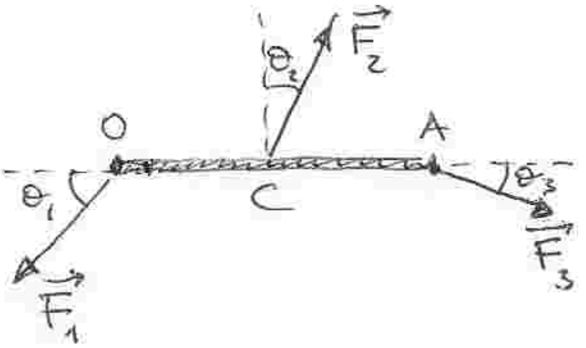
PROBLEMA 1



$|\vec{F}_1| = F_1 = 30\,N \quad ; \theta_1 = 45°$

$|\vec{F}_2| = F_2 = 25\,N \quad ; \theta_2 = 30°$

$|\vec{F}_3| = F_3 = 10\,N \quad ; \theta_3 = 20°$

$|OC| = 2\,m = \ell$

$|OA| = 4\,m = 2\ell$

a) momento assiale rispetto all'asse per O, perpendicolare al piano della figura.

$$M_{O,z} = |OC|\, F_2 \cos\theta_2 - |OA|\, F_3 \sin\theta_3 =$$

$$= 2\,m \times 25\,N \cos 30° - 4\,m \times 10\,N \times \sin 20°$$

$$= (43.3 - 13.7)\ N\cdot m = 29.6\ N\cdot m$$

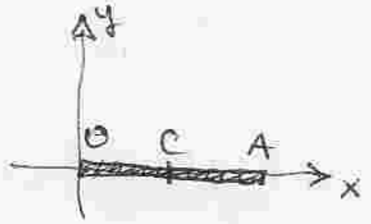
b) momento assiale rispetto all'asse per C, perpendicolare al piano della figura:

$$M_{C,z} = |OC|\, F_1 \sin\theta_1 - |CA|\, F_3 \sin\theta_3 =$$

$$= 2 \times 30 \times \sin 45° - 2 \times 10 \sin 20° =$$

$$= (42.4 - 6.8)\ N\cdot m = 35.6\ N\cdot m$$

Gli stessi risultati si possono ottenere introducendo un sistema di coordinate cartesiane, p. es.:

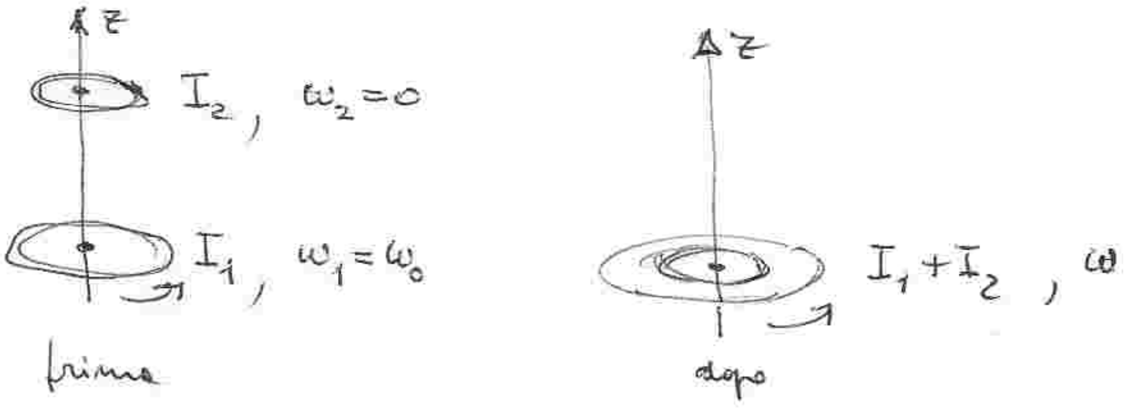


$$\vec{M}_O = OC \times \vec{F}_2 + OA \times \vec{F}_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \ell & 0 & 0 \\ F_2\sin\theta_2 & F_2\cos\theta_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2\ell & 0 & 0 \\ F_3\cos\theta_3 & -F_3\sin\theta_3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \ell F_2 \cos\theta_2\, \hat{k} + (-2\ell F_3 \sin\theta_3)\hat{k} = \ldots = 29.6\ N\cdot m \cdot \hat{k}$$

PROBLEMA 2



le forze d'attrito che trascinano il secondo cilindro, quando viene messo a contatto col primo, possono essere considerate forze interne al sistema

$$\Rightarrow \quad M_z^{(e)} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_z = \text{cost}$$

a) ne segue che:

$$I_1 \omega_0 = (I_1 + I_2)\,\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\,\omega_0$$

b) energia cinetica:

$$K_i = \frac{1}{2} I_1 \omega_0^2 \qquad \text{iniziale}$$

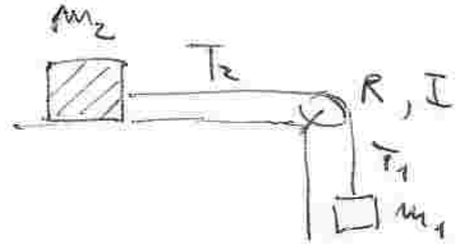
$$K_f = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\,\omega^2 = \frac{1}{2}\cancel{(I_1+I_2)}\frac{I_1^2}{(I_1+I_2)^{\cancel{2}}}\,\omega_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{I_1^2}{I_1 + I_2}\,\omega_0^2 < K_i$$

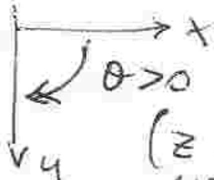
$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\frac{I_1^{\cancel{2}}}{I_1+I_2}\cancel{\omega_0^2}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{I_1}\cancel{\omega_0^2}} = \frac{I_1}{I_1 + I_2} < 1$$

$\Rightarrow$ vi è perdita di energia cinetica, dissipata dalle forze (interne) di attrito.

PROBLEMA 3



introducendo coordinate opportune possiamo scrivere le equazioni del moto per le due masse e per la puleggia:



(z entrante nel piano del foglio)

$$\left.\begin{array}{ll} m_1 g - T_1 = m_1 a & (1) \\ T_2 = m_2 a & (2) \\ T_1 R - T_2 R = I\alpha & (3) \\ a = \alpha R & (4) \end{array}\right\}$$

attenzione ai segni nelle rotazioni! Con le scelte fatte sono positive le rotazioni orarie!

a) determiniamo l'accelerazione a, per sostituzione

$$(1) \Rightarrow T_1 = m_1 (g-a)$$

$$(3) \Rightarrow m_1 (g-a) R - m_2 a R = I \frac{a}{R} \quad / \times \frac{1}{R}$$

$$m_1 g - m_1 a - m_2 a - \frac{I}{R^2} a = 0$$

$$\boxed{a = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I^2}{R}} g} = \dots$$

b) tensioni:

$$T_1 = m_1 (g-a) = m_1 g - \frac{m_1^2 g}{m_1 + m_2 + I^2/R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = m_1 g \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2 + I^2/R}\right)} = \dots$$

$$\boxed{T_2 = m_2 a = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2 + I^2/R} g} = \dots$$

(c) valori numerici per a, T_1, T_2 : facile sostituzione

(d) risultati se $I \to 0$:

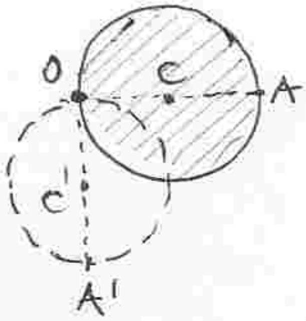
$$a = \frac{m_1}{m_1+m_2}\, g$$

$$T_1 = m_1 g\left(1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right) = m_1 g \cdot \frac{\cancel{m_1} + m_2 - \cancel{m_1}}{m_1+m_2} =$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\, g$$

$$T_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\, g = T_1$$

PROBLEMA 4



disco massa M, raggio R

momento d'inerzia rispetto ad un asse per C, perpendicolare al piano che contiene il disco : $I_c = \frac{1}{2} M R^2$

momento d'inerzia rispetto ad un asse per O, perpendicolare etc. etc. :

(Teor. Huygens-Steiner) $I_O = I_C + MR^2 = \frac{3}{2} M R^2$

a) velocità quando C passa per la verticale per O :
Conservazione dell'energia meccanica :

$$E_{M\,i} = E_{M\,f} \qquad E_M = K + V$$

scegliamo lo zero per la posizione più bassa di C

$$0 + MgR = \frac{1}{2} I_O \omega_f^2 + 0$$

$$\omega_f^2 = \frac{2\cancel{M}gR}{\frac{3}{2}\cancel{M}R^2} = \frac{4}{3}\frac{g}{R}$$

$$\Longrightarrow \omega_f = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{g}{R}} \longrightarrow v_C = \omega_f R = \sqrt{\frac{4}{3} g R} = 2\sqrt{\frac{gR}{3}}$$

PROBLEMA 4

(b) velocita' del punto A' (vedi disegno)

$$v_{A'} = \omega_f \cdot 2R = 2v_c = 4\sqrt{\frac{gR}{3}}$$

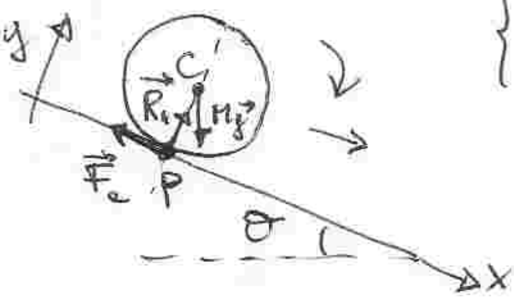
(c) se il disco viene sostituito da un anello di eguale massa, il procedimento non cambia, ma cambia il valore del momento d'inerzia:

$$I_c = MR^2 \quad , \quad I_o = I_c + MR^2 = 2MR^2$$

$$\Rightarrow \omega_f^2 = \frac{2MgR}{I_o} = \frac{\cancel{2}\cancel{M}g\cancel{R}}{\cancel{2}\cancel{M}R^{\cancel{2}}} = \frac{g}{R}$$

$$\Rightarrow \omega_f = \sqrt{\frac{g}{R}} \Rightarrow v_c = \omega_f R = \sqrt{gR}$$

PROBLEMA 5



$\begin{cases} \text{massa } M \\ \text{raggio } R \end{cases}$, momento d'inerzia I_c

$$\begin{cases} I_c = \frac{1}{2}MR^2 \text{ cilindro} \\ \cancel{\left(I_c = \frac{2}{5}MR^2 \text{ sfera}\right)} \\ I_c = MR^2 \text{ anello} \end{cases}$$

equazioni del moto:

dalla I eq. cardinale: attrito statico

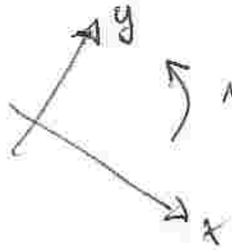
$$\vec{F}^{(e)} = M\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{F}_a = M\vec{a}_c$$

proiettando lungo x ($F_a = |\vec{F}_a|$)

$$Mg\sin\theta - F_a = Ma_c \quad (1)$$

dalla II equazione cardinale: scelgo C come polo ($M\vec{g}$, $\vec{R}_n$ momento nullo)

$$M_c^{(e)} = I_c\alpha$$



$$-F_aR = I_c\alpha \quad (2)$$

vincolo di puro rotolamento:

$$-d\theta = dx_c/R$$

$$-\omega = -\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dx_c}{dt} = v_c/R$$

$$-\alpha = -\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{d^2x_c}{dt^2} = a_c/R \implies \alpha = -\frac{a_c}{R} \quad (3)$$

Sostituendo (2) e (3) nella (1): $F_a = -\frac{I_c}{R}\alpha = \frac{I_c}{R^2}a_c$ (2')

$$Mg\sin\theta - \frac{I_c}{R^2}a_c = Ma_c$$

$$a_c = \frac{Mg\sin\theta}{M + \frac{I_c}{R^2}} = g\frac{\sin\theta}{1 + \frac{I_c}{MR^2}}$$

$\Longrightarrow$ accelerazione di un disco omogeneo $\left(I_c = \frac{1}{2}MR^2\right)$

$$a_c = g\,\frac{\sin\theta}{1+\frac{1}{2}\frac{\cancel{MR^2}}{\cancel{MR^2}}} = g\cdot\frac{2}{3}\sin\theta < g\sin\theta$$

(scivolamento senza attrito)

$\Longrightarrow$ anello:

$$a_c = g\,\frac{\sin\theta}{1+\frac{MR^2}{MR^2}} = g\cdot\frac{1}{2}\sin\theta$$

l'anello ha momento d'inerzia maggiore, quindi l'accelerazione del CM è inferiore poiché una frazione maggiore dell'energia potenziale si trasforma in energia cinetica di rotazione.

$$E = V + K = V + \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$$

b) minimo coefficiente di attrito (statico) per mantenere il rotolamento:

dalla (2') $F_a = \frac{I_c}{R^2}a_c = \frac{I_c}{R^2}\cdot\frac{\sin\theta}{1+\frac{I_c}{MR^2}}\cdot g$

dev'essere $|F_a| \le \mu_s|R_N| = \mu_s Mg\cos\theta$

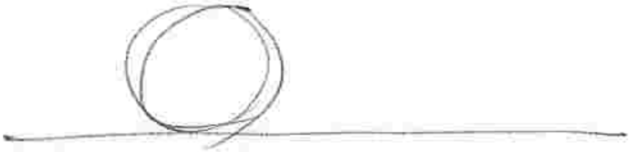
$$\underset{\displaystyle\frac{I_c}{R^2}\,\frac{\sin\theta}{1+\frac{I_c}{MR^2}}\,g}{\shortparallel}$$

$$\Longrightarrow \mu_s \geq \frac{I_c}{R^2}\,\frac{\cancel{g}}{1+I_c/MR^2}\cdot\sin\theta\cdot\frac{1}{M\cancel{g}\cos\theta} =$$

$$\mu_s \geq \frac{I_c}{MR^2}\,\frac{1}{1+I_c/MR^2}\cdot\operatorname{tg}\theta$$

$$\begin{cases}\text{disco: } \mu_s \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+1/2}\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\theta \\ \text{anello: } \mu_s \geq \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta\end{cases}$$

PROBLEMA 6



sfera omogenea:

$$I_c = \frac{2}{5} M R^2$$

$M = 150\ \text{kg} \qquad R = 0{,}2\ \text{m}$

lavoro per portare la sfera dalla quiete al puro rotolamento con $\omega = 50\ \text{rad/s}$?

$$\mathcal{L} = \Delta K = K_f - \cancel{K_i}_{\,0} = K_f =$$

$$= \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 \qquad v_c = \omega R$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} M R^2 \cdot \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 \left(1 + \frac{2}{5}\right) \omega^2 =$$

$$= \frac{7}{10} M R^2 \omega^2 = 10500\ \text{J}$$

PROBLEMA 7

cilindro
$M = 10\ \text{kg} \quad (R = ?) \quad I_c = \frac{1}{2} M R^2$
puro rotolamento

c) energia cinetica totale del cilindro

$$\omega = \frac{v_c}{R}$$

$$K = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M \cancel{R^2} \cdot \frac{v_c^2}{\cancel{R^2}} =$$

$$= \frac{3}{4} M v_c^2 = 750\ \text{J}$$

a) energia cinetica "del centro di massa" : $\frac{1}{2} M v_c^2 = 500\ \text{J}$

b) energia cinetica di rotazione attorno al CM : $\frac{1}{2} I_c \omega^2 = \frac{1}{4} M v_c^2 = 250\ \text{J}$

PROBLEMA 8

cilindro omogeneo: $I_c = \frac{1}{2} MR^2$

cerchio : $I_c = MR^2$

v_c alla fine della discesa?

Chi arriva prima?

Conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{Mi} = E_{Mf} \qquad E_M = K + V = $$
$$= \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 + Mgz$$

$$0 + 0 + Mgh = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 + 0$$

$$\omega = \frac{v_c}{R} \Rightarrow \quad Mgh = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \frac{v_c^2}{R^2}$$

$$\cancel{M} g h = \frac{1}{2} \cancel{M} v_c^2 \left(1 + \frac{I_c}{MR^2}\right)$$

$$v_c = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I_c/MR^2}}$$

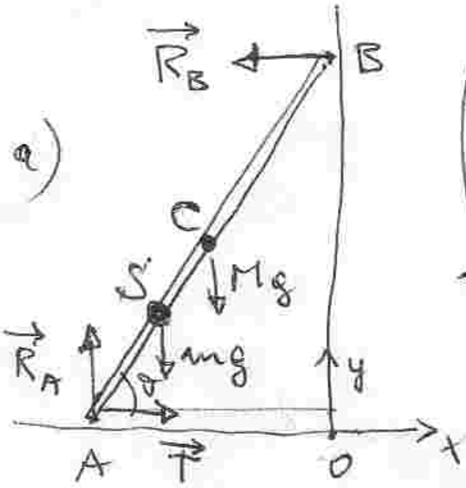
Se $I_c = 0$ si riottiene il familiare risultato $v_c = \sqrt{2gh}$ (puro scivolamento, senza attrito)

I_c (cerchio) $>$ I_c (cilindro) $\Rightarrow$ v_c (cerchio) $<$ v_c (cilindro)

vero anche per le posizioni intermedie

$\Rightarrow$ il cerchio arriva dopo.

PROBLEMA 9

a) 

$$\begin{cases} \text{massa scala } M = 30\,kg, \text{ lunghezza } l \\ \text{massa scimmia } m = 25\,kg \\ T = |\vec{T}| \quad R_A = |\vec{R}_A| \quad R_B = |\vec{R}_B| \\ |AS| = \frac{l}{3} \qquad \theta = 53° \\ |AC| = \frac{l}{2} \\ T_{max} = 25 \times 9.81\ N \end{cases}$$

b) tensione della corda? Condiz. equilibrio statico:

$$\vec{F}^{(e)} = 0 \iff \begin{cases} x: \quad T - R_B = 0 & (1) \\ y: \quad R_A - mg - Mg = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\vec{M}^{(e)}_A = 0 \iff \hat{k}: \; -mg\frac{l}{3}\cos\theta - Mg\frac{l}{2}\cos\theta + R_B\, l \sin\theta = 0 \qquad (3)$$

mom. assiali

Scegliamo come polo A

$(1) \Rightarrow R_B = T$

$$(3) \Rightarrow R_B = \frac{g\cos\theta\left(m\frac{\cancel{l}}{3} + M\frac{\cancel{l}}{2}\right)}{\cancel{l}\sin\theta} =$$

$$= g\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(\frac{2m + 3M}{6}\right) = T$$

c) Se la tensione di rottura è T_{max} $(= 25 \times 9.81\ N)$ quale è la frazione massima della scala $\eta = \frac{|AS|}{l}$ che la scimmia può risalire?

$$T_{max} \geq T = g\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(m\eta + \frac{M}{2}\right) =$$

$$= \eta \cdot mg\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{2}Mg\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Da cui si ricava:

$$\eta \leq \frac{T_{max}}{mg} \cdot tg\vartheta - \frac{\frac{1}{2}M\cancel{g}\,\cancel{cotg\vartheta}}{m\cancel{g}\,\cancel{cotg\vartheta}}$$

$$\eta \leq \eta_{max} = \frac{T_{max}}{mg}\, tg\vartheta - \frac{M}{2m}$$

Usando i dati numerici:

$$T_{max} = 25\ kg \times g = mg$$

$$M = 30\ kg\ ,\ m = 25\ kg$$

$$\Rightarrow \eta_{max} = tg\vartheta - \frac{30}{50} = tg\vartheta - \frac{3}{5} = 0.72$$

La scimmia può risalire una frazione massima della scala $\eta_{max} \cdot \ell = 0{,}72\,\ell$ prima che la fune si spezzi.