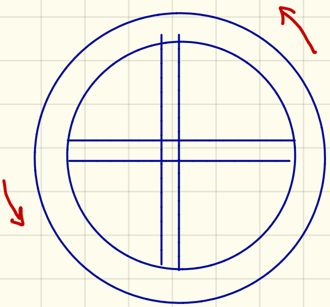
1) ESEMPIO: ASTRONAVE ROTANTE



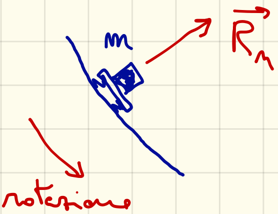
gravità artificiale su astronave rotante, in "caduta libera" o assenza di gravità

$$\begin{cases} \text{raggio } R = 100\,m \\ \text{velocità angolare } \omega_0 = ? \end{cases}$$

per produrre "peso apparente" pari a quello che si ha sulla superficie terrestre?

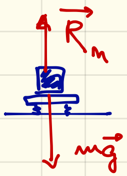
a) osservatore inerziale:

oggetto di massa m in quiete sull'astronave, al raggio R appoggiato su una bilancia pesa-persone: unica forza reale reazione normale $\vec{R}_n$ (contatto)



$$\vec{R}_n = m\vec{a}_n = m\frac{v_s^2}{R}\hat{u}_n$$ moto circolare uniforme

$$= m\,\omega_0^2 R\,\hat{u}_n$$



da confrontare con (sulla sup. terrestre)

$$\vec{R}_n + m\vec{g} = 0 \qquad \vec{R}_n = -m\vec{g}$$

$\Longrightarrow$ la condizione richiesta è

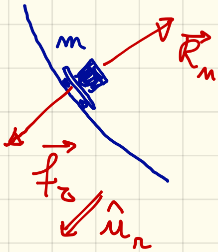
$$\cancel{m}\,\omega_0^2 R = R_n = \cancel{m}g \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}} = 0{,}313\,\frac{rad}{s}$$

che corrisponde ad una velocità scalare al raggio R:

$$v_s = \omega_0 R = 31{,}3\;m/s \simeq 31\;m/s$$

2)

b) osservatore non inerziale, solidale con l'astronave $(O'x'y')$

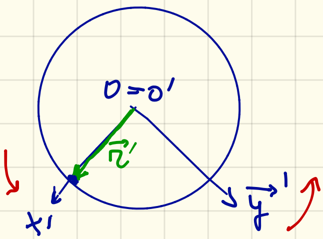


il corpo di massa m è in quiete

$$\vec{v}' = 0 \quad , \quad \vec{a}' = 0$$

$$\vec{R}_n + \vec{f}_\tau = m\vec{a}' = 0$$

reale — pseudo-forza di trascinamento



$$\vec{f}_\tau = -m\,\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}' = m\,\omega_0^2 r\,\hat{u}_r$$

forza centrifuga

Stesso risultato finale:

$$O\,\vec{\omega} = \omega_0 \hat{k}$$

$$m\,\omega_0^2 r = R_n = mg \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

Variante: che succede se una persona sull'astronave corre con velocità $v_p' = 10\ m/s$ rispetto all'astronave? quanto vale il suo peso apparente?

Supponiamo $m = 70\ kg$ e corre nello stesso verso della rotazione

a) osservatore inerziale:

la persona si muove su una circonferenza di raggio R con velocità scalare $v = v_s + v' = 41.3\ m/s$

e velocità angolare $\omega = \omega_0 + \omega' = \frac{v}{r} = 0{,}413\ rad/s$

cui corrisponde una forza risultante centripeta (peso apparente)

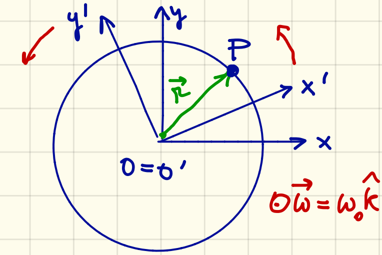
$$R_n = m\frac{v^2}{r} = m\,\omega^2 r = 1193\ N$$

3)

da confrontare con $mg = m\omega_0^2 r = 686\,N$ per una persona in quiete rispetto all'astronave

(equivalente a 70 kg $\rightarrow$ 122 kg !)

b) osservatore non inerziale $O'x'y'$ rotante con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{k}$ rispetto ad Oxy



il corpo P di massa m si muove su circonferenza di raggio $r = r'$ con velocità scalare $v = v_s + v'$ per Oxy e velocità scalare v' per $O'x'y'$ $\begin{cases} v = 41\ m/s \\ v' = 10\ m/s \end{cases}$

analisi delle forze agenti su P e sua accelerazione in $O'x'y'$

$\begin{cases} (1) \text{ forze reali: } \vec{R}_n \text{ come per } Oxy \\ (2) \text{ forze apparenti: } \end{cases}$

$$\begin{cases} \vec{f}_z = \underbrace{\cancel{-m\vec{A}}}_{O \equiv O'} - \underbrace{\cancel{m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'}}_{\vec{\omega} = \text{cost.}} - \underbrace{m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'}_{\text{centrifuga}} \\ \vec{f}_{co} = \underbrace{-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{Coriolis}} \end{cases}$$

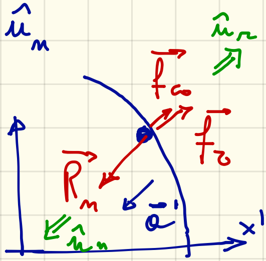
(3) accelerazione: $\vec{a}' = \vec{a}'_n = \dfrac{v'^2}{r}\hat{u}_n$ centripeta

equazione del moto in $O'x'y'$:

$$\vec{R}_n + (-m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}') + (-2m\vec{\omega} \times \vec{v}') = m\vec{a}'$$

$$R_n \hat{u}_n + m\omega_0^2 r \underbrace{\hat{u}_r}_{-\hat{u}_n} + 2m\omega_0 v' \underbrace{\hat{u}_r}_{-\hat{u}_n} = m\frac{v'^2}{r}\hat{u}_n$$

$$R_n - m\omega_0^2 r - 2m\omega_0 v' = m\frac{v'^2}{r}$$



4)

quindi per l'osservatore non inerziale il peso apparente è

$$R_n = \underbrace{m\omega_0^2 r}_{\text{centrifuga}} + \underbrace{2m\omega_0 v'}_{\text{Coriolis}} + m\frac{v'^2}{r} =$$

$$= 70 \times \left(0{,}313^2 \times 100 + 2 \times 0{,}313 \times 10 + \frac{10^2}{100}\right) = 1193\ N$$

NB: come "forza reale" di contatto, esercitata sul corpo dalla superficie d'appoggio, R_n ha lo stesso valore per i due osservatori Oxy e $O'x'y'$!!!

importanza relativa dei 3 contributi:

$$m\omega_0^2 r = 686\ N$$
$$2m\omega_0 v' = 438\ N$$
$$m\frac{v'^2}{r} = 70\ N$$
$$\approx 1194\ N$$

OK entro gli arrotondamenti (2÷3 cifre significative)