Esercizi di Geometria
Ingegneria Industriale e Navale
2018/2019
secondo foglio

September 28, 2018

1. Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ una base bissata del piano dei vettori geometrici $\mathcal{V}^2$ e si consideri la funzione
$$F_{\mathcal{B}} : \mathcal{V}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F_{\mathcal{B}} : \vec{v} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$
Si dimostri che se $W \subseteq \mathbb{R}^2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$, allora $F_{\mathcal{B}}^{-1}(W) \subseteq \mathcal{V}^2$ è un sottospazio vettoriale.

2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K, e siano $U \subseteq V$ e $W \subseteq V$ due sottospazi vettoriali. Si dimostri che l'unione $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V se e esolo se
$$U \subseteq W, \quad \text{oppure} \quad W \subseteq U.$$

3. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, sia $v \in V$ un vettore $v \neq 0$ fissato e sia $a \in \mathbb{K}$ uno scalare fissato. Si dimostri che
$$\mathrm{Span}(v, av) = \mathrm{Span}(v).$$

4. Si dimostri che l'insieme $M_{m,n}(\mathbb{K})$ delle matrici $m \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ con le operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare definite nel corso è uno spazio vettoriale.