

Esercizi di Geometria
Ingegneria Industriale e Navale
2018/2019
terzo foglio

October 1, 2018

1. Si determini la matrice 2×1 a coefficienti reali data dal seguente prodotto righe per colonne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ una matrice qualunque. Si dimostri che le matrici

$$A \cdot {}^t A \in M_m(\mathbb{K}), \quad {}^t A \cdot A \in M_n(\mathbb{K})$$

sono simmetriche.

Si calcoli in particolare la matrice prodotto

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot {}^t \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata. Si dimostri che la matrice

$$A + {}^t A$$

è simmetrica.

4. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata. Definiamo

$$A^k := \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ volte}}.$$

Si calcoli

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3.$$

5. Una matrice $N \in M_n(\mathbb{K})$ si dice nilpotente se esiste un numero naturale $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$N^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che per ogni $a, b, c \in \mathbb{K}$ le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono nilpotenti.