Fisica Newtoniana

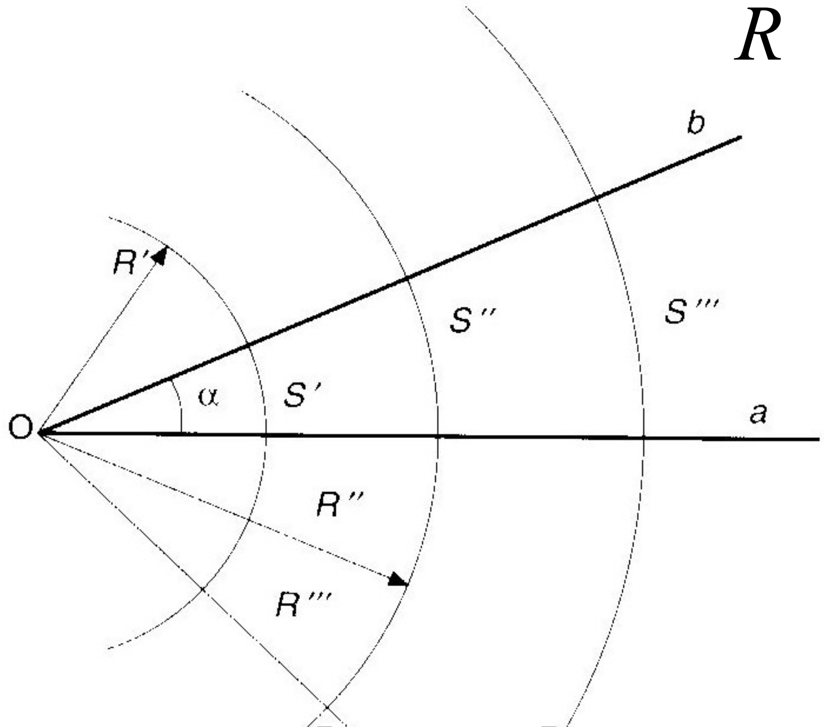
Misure di grandezze fisiche
e incertezze di misura

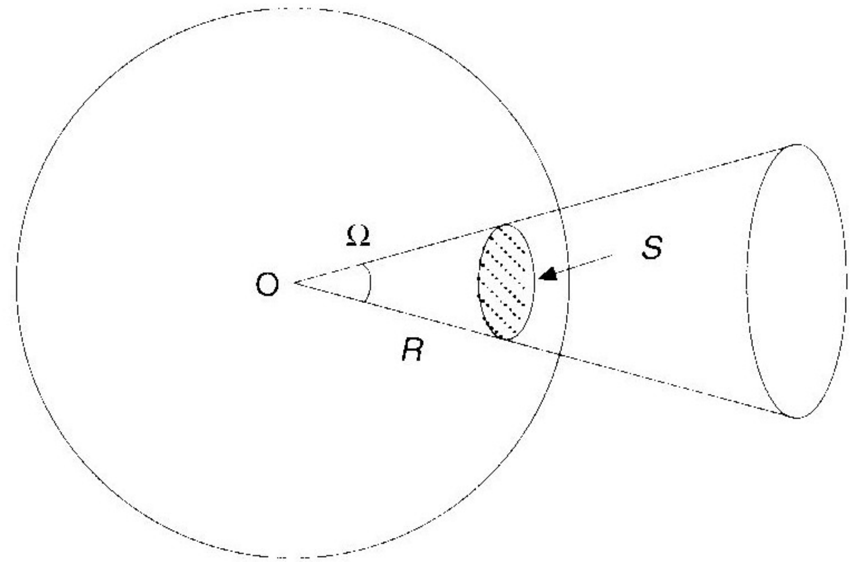
Grandezze a-dimensionali

- **Angolo**
  - Unità: radiante $\alpha = \dfrac{s}{R}$

angolo solido

Unità: steradiante $\Omega = \dfrac{S}{R^2}$





$$[\alpha] = \frac{[s]}{[R]} = \frac{[L^1M^0T^0]}{[L^1M^0T^0]} = [L^0M^0T^0]$$

$$[\Omega] = \frac{[S]}{[R^2]} = \frac{[L^2M^0T^0]}{[L^2M^0T^0]} = [L^0M^0T^0]$$

Grandezze a-dimensionali

Argomenti delle funzioni trascendenti

- Funzioni trigonometriche, esponenziale, logaritmo,…: sono approssimabili con polinomi (somme di termini con potenze crescenti): per il criterio di omogeneità dimensionale, l'argomento dev'essere a-dimensionale!!!

$$\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad \cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Esempio: legge oraria di un moto oscillatorio:

$x(t) = \cos t$ NO !!!

$x(t) = A\cos(\omega t)$ OK, se:

$$[\mathrm{A}] = [x] = [L], \quad [\omega] = [T^{-1}] \Rightarrow [\omega t] = [T^{-1}T^{1}] = [L^0 M^0 T^0]$$

Incertezze o "errori" di misura

Errori "accidentali" e "sistematici"

Errori "accidentali" o "statistici" ("precisione" della misura)

- Dovuti al concorso di un insieme di piccole perturbazioni non prevedibili e non controllabili, in parte positive e in parte negative

- possono essere analizzati con metodi statistici generali a partire dai risultati di misure ripetute

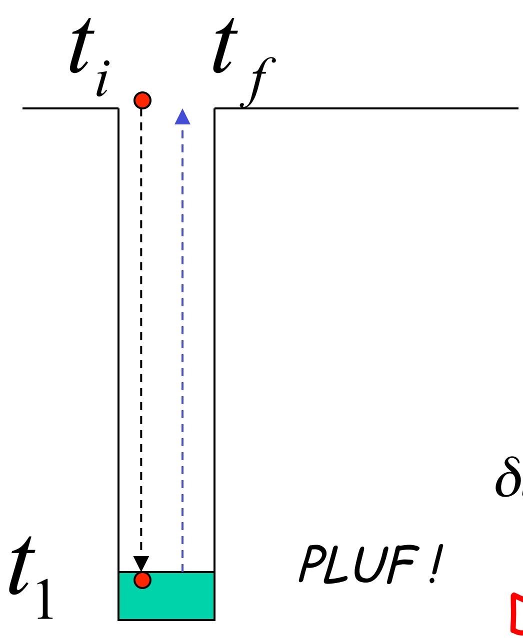
Errori "sistematici" ("accuratezza" della misura)

- Si ripresentano in misure ripetute con il medesimo valore e segno: perturbano il risultato sempre nello stesso verso (sempre in eccesso o sempre in difetto)

- non esistono regole generali: vanno individuati e ove possibile corretti caso per caso, attraverso una attenta analisi delle condizioni ambientali, del metodo di misura e delle caratteristiche della strumentazione

Errore sistematico: un esempio

- ***Misura indiretta della profondità h di un pozzo***
  - Profondità *h* dalla misura del tempo *t* impiegato da un sasso ad arrivare in fondo al pozzo
  - Tempo *t* (e quindi *h*) sovrastimato sistematicamente se:
    - "start" = istante t_i in cui il sasso viene lasciato cadere
    - "stop" = istante t_f in cui arriva in superficie il suono (PLUF !)



$$t_i = 0.0\,\mathrm{s}; \qquad t_f = 2.5\,\mathrm{s}$$

$$h = \frac{1}{2} g (t_f - t_i)^2 \approx 31\,\mathrm{m}$$

Il tempo impiegato dal suono per percorrere 31m
Dal fondo ($t=t_1$) alla superficie ($t=t_f$) è all'incirca:

$$\delta t = t_f - t_1 \cong \frac{31\,\mathrm{m}}{330\,\mathrm{m/s}} = 0.1\,\mathrm{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta t}{t_f - t_i} = \frac{0.1}{2.5} = 0.04 = 4\%$$

Di quanto si sovrastima *h* se *t* è sovrastimato del 4% ?

Cifre significative

- ***Regola per le incertezze***
  - Le incertezze di misura dovrebbero (quasi) sempre essere arrotondate ad una cifra significativa
  - (Possibile eccezione se l' incertezza ha come prima cifra significativa 1 o 2)

$g = 9.82 \pm 0.023\cancel{85}\ m/s^2 \quad \Rightarrow \quad g = 9.82 \pm 0.02\ m/s^2$

(oppure: $g = 9.820 \pm 0.024\ m/s^2$)

- ***Regola per la miglior stima (valore centrale)***
  - L' ultima cifra significativa nella migliore stima di un risultato sperimentale dovrebbe essere dello stesso ordine di grandezza (cioe` nella stessa posizione decimale) dell' incertezza corrispondente

$v = 6051.\cancel{78} \pm 31\ m/s \quad \Rightarrow \quad v = 6050 \pm 30\ m/s$

(oppure: $v = 6052 \pm 31\ m/s$)

Cifre significative – regole di calcolo

- ***Somme e sottrazioni***
  - Nel risultato compaiono solo le cifre nelle posizioni decimali in cui entrambi gli operandi hanno cifre; ad esempio:

$$5.2 + 3.1 = 8.3 \quad 6.843 + 1.2 = 8.0 \quad 6.843 + 0.001 = 6.844$$

$$5 \times 10^2 - 4 = 5 \times 10^2 \quad 5.00 \times 10^2 - 4 = 4.96 \times 10^2$$

- ***Prodotti e quozienti***
  - Il risultato ha lo stesso numero di cifre significative dell'operando che ne ha di meno; ad esempio:

$$5.2 \times 3.1 = 16. \quad 5.243 \times 3.1 = 16. \quad 5.243 \times 0.0031 = 0.016$$

$$\frac{37}{9} = 4 \quad \frac{37}{9.1} = 4.1$$

- ***Conviene usare la notazione scientifica, non ambigua***

$$500 \quad ?(1 \text{ o } 3 \text{ cifre signif.?}) \quad 5 \times 10^2 \ (1 \text{ cifra signif.}) \quad 5.00 \times 10^2 \ (3 \text{ cifre signif.})$$

Errori assoluti e relativi

- ***Errore (incertezza) assoluto***
  - Def. $\varepsilon_a = |\delta x|$
  - Esempio $\delta x = 2$ mm $\Rightarrow$ $\varepsilon_a = 2$ mm
- ***Errore relativo*** (adimensionale!)
  - Def. $\varepsilon_r = |\delta x| / |x_m|$
  - Esempio $x_m = 1.327$ m $\Rightarrow$ $\varepsilon_r = 1.5 \times 10^{-3}$
- ***Errore percentuale*** (adimensionale!)
  - Def. $\varepsilon_{\%} = 100 \times |\delta x| / |x_m|$ (%)
  - esempio $\Rightarrow$ $\varepsilon_{\%} = 0.15$ %

NB: spesso l'errore relativo è quello che conta

Misure indirette: "propagazione" delle incertezze?

"Propagazione degli errori massimi"

Qualche esempio...

Incertezza in una **funzione di una sola variabile?**

$$q = f(x)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Incertezza in **somme e differenze?**

$$q = u \pm v$$

Incertezza in **prodotti e quozienti?**

$$q = uv \qquad q = \frac{u}{v}$$

$$S = ab \qquad v = \frac{x}{t}$$

Incertezza in una **potenza?**

$$q = x^n$$

$$V = L^3$$

Caso generale: **funzione arbitraria?**

$$q = f(u,v,w,\ldots)$$

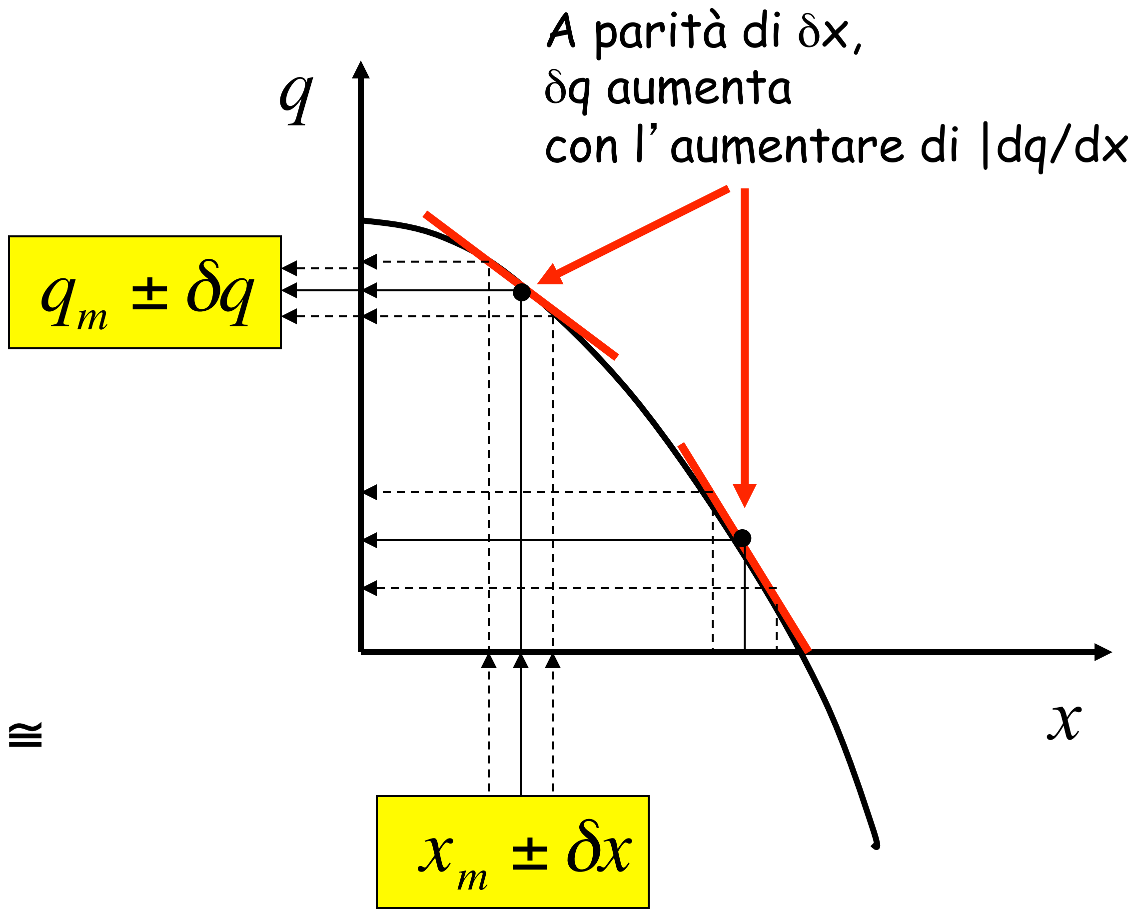
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h}$$

Propagazione: funzione di una variabile

Funzione di una variabile:

$$q = q(x) \qquad x = x_m \pm \delta x$$

$$\boxed{\begin{aligned} q_m &= q(x_m) \\ \delta q &= \left|\frac{dq}{dx}\right|_{x=x_m} \delta x \end{aligned}}$$



Giustificazione:

$$\delta q = \left|q(x_m + \delta x) - q(x)\right| \cong$$

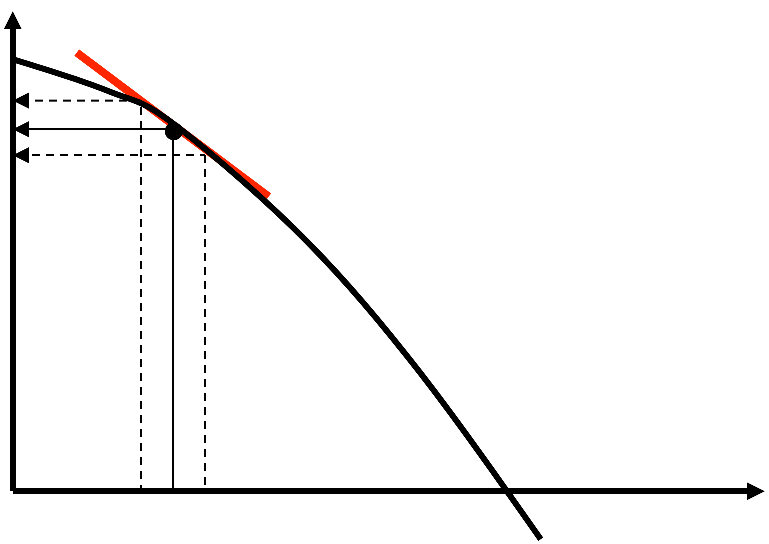
$$\cong \left|\frac{dq}{dx}\right|_{x=x_m} \delta x$$

Propagazione, una variabile: esempio

Funzione di una variabile

$$q = q(x) \qquad x = x_m \pm \delta x$$

$$\boxed{\begin{array}{l} q_m = q(x_m) \\ \delta q = \left|\dfrac{dq}{dx}\right|_{x=x_m} \delta x \end{array}}$$



Un esempio

$$\boxed{\theta = (20 \pm 3)^o} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos\theta = ?}$$

$$\theta_m = 20^o = 0.35 rad \qquad \delta\theta = 3^o = 0.05 rad$$

$$\cos(\theta_m) = 0.94$$

$$\delta(\cos\theta) = \left|\frac{d\cos\theta}{d\theta}\right|_{\theta=0.35} \delta\theta =$$

$$= |\sin(0.35)|\delta\theta =$$

$$= 0.34 \times 0.05 = 0.02$$

$$\boxed{\cos\theta = 0.94 \pm 0.02}$$

Propagazione: caso generale

Funzione arbitraria di piu' variabili (riassume tutti i casi precedenti)

$$q = q(u,v,\ldots) \quad \Rightarrow \quad q_m = q(u_m,v_m,\ldots)$$

$$\boxed{\delta q \le \left|\frac{\partial q}{\partial u}\right|\delta u + \left|\frac{\partial q}{\partial v}\right|\delta v + \ldots}$$

con derivate parziali valutate in: (u_m, v_m)

In molti casi questa e` una sovrastima dell'errore:

se le incertezze in u,v,… sono **indipendenti** e **accidentali**,
l'incertezza viene stimata con la "**somma in quadratura**"

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial u}\delta u\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\delta v\right)^2 + \ldots}$$

Ritorneremo su questo punto discutendo le misure indirette ripetute

Alcuni casi particolari: somme, differenze

- ***Somma o differenza***
  - L'errore massimo **assoluto** è (in entrambi i casi) la **somma** degli errori massimi **assoluti** degli operandi

$$q = x + y \qquad x = x_m \pm \delta x, \qquad y = y_m \pm \delta y$$

$$q_m = x_m + y_m \qquad \delta q = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|\delta y = 1 \times \delta x + 1 \times \delta y = \delta x + \delta y$$

$$q = x - y \qquad x = x_m \pm \delta x, \qquad y = y_m \pm \delta y$$

$$q_m = x_m - y_m \qquad \delta q = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|\delta y = 1 \times \delta x + \left|-1\right| \times \delta y = \delta x + \delta y$$

Alcuni casi particolari: quozienti, prodotti, potenze

- ***Quoziente o prodotto***
  - L'errore massimo **relativo** è la **somma** degli errori massimi **relativi**

$$\boxed{q = xy} \qquad x = x_m \pm \delta x, \quad y = y_m \pm \delta y$$

$$q_m = x_m y_m \qquad \frac{\delta q}{|q|} = \frac{1}{|q|}\left(\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|\delta y\right) = \frac{|y|}{|xy|}\delta x + \frac{|x|}{|xy|}\delta y = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|}$$

$$\boxed{q = \frac{x}{y}} \qquad x = x_m \pm \delta x, \quad y = y_m \pm \delta y$$

$$q_m = \frac{x_m}{y_m} \qquad \frac{\delta q}{|q|} = \frac{1}{|q|}\left(\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|\delta y\right) = \left|\frac{y}{x}\right|\left(\frac{1}{|y|}\delta x + \frac{|x|}{|y^2|}\delta y\right) = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|}$$

- ***Potenze***
  - Immediata generalizzazione dal prodotto:

$$\boxed{q = x^n} \qquad \frac{\delta q}{|q|} = |n|\frac{\delta x}{|x|}$$

Misure ripetute

La statistica ci aiuta…
"analisi statistica" degli "errori accidentali"

Una misura fatta durante una lezione - 1

Misure dirette ripetute della lunghezza di un banco

A. Usando fotocopie di un righello

Campo di misura 20 cm

Costante di lettura c = 1 mm

B. Con un regolo metallico

Campo di misura 100 cm

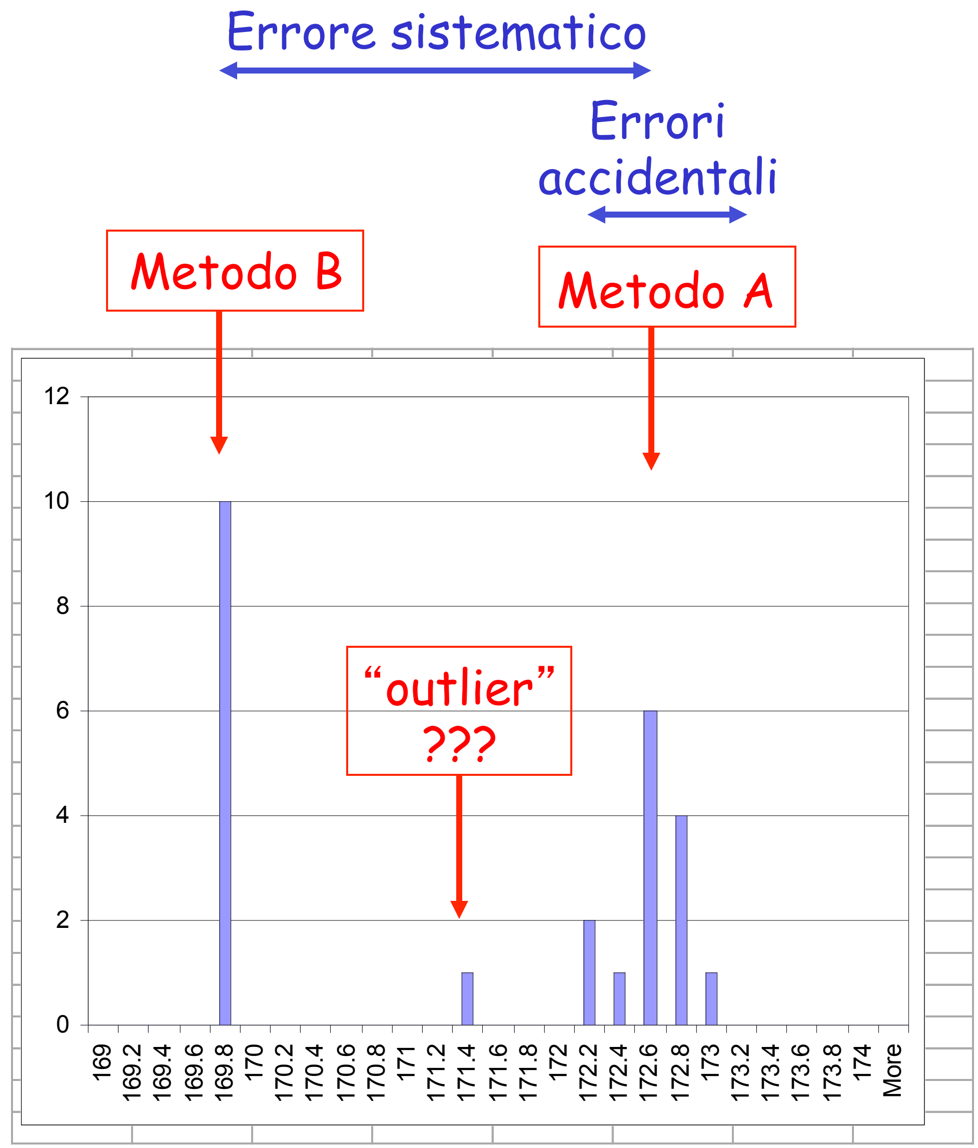
Costante di lettura c = 1 mm

metodo	Indice	operatore	xi(cm)
A	1	SS	172.6
A	2	SS	172.5
A	3	LL	172.2
A	4	LL	172.7
A	5	SD	172.3
A	6	SD	172.6
A	7	GS	171.4
A	8	GM	172.1
A	9	LB	172.8
A	10	LB	172.6
A	11	LL	172.8
A	12	LB	173.0
A	13	GS	172.6
A	14	LL	172.6
A	15	LL	172.8
B	1		169.8
B	2		169.8
B	3		169.8
B	4		169.8
B	5		169.8
B	6		169.8
B	7		169.8
B	8		169.8
B	9		169.8
B	10		169.8

Misura: commenti - 1

Istogramma (a barre):

- Scala orizzontale: include tutti i valori misurati (p.es.da 169.0 a 174.0 cm
- Intervalli ("bin"): abbiamo scelto ciascuno 0.2 cm, estremo inferiore incluso
- Scala verticale: per ogni bin, barra proporzionale al numero di misure nell' intervallo corrispondente



Misura: commenti - 2

Metodo A:

- **Errori accidentali**, maggiori della costante di lettura del regolo: le operazioni rudimentali di misura con il regolo "fotocopia", corto, introducono ad ogni passo piccole variazioni casuali: e' il tipico caso in cui le misure risultano avere una distribuzione "gaussiana" (come vedremo) ;

- **Errore sistematico**: le misure differiscono sensibilmente da quelle eseguite col regolo metallico (metodo B); una prima stima della differenza percentuale e` circa: 100 x (172.7 – 169.8)/169.8 = 1.7%, compatibile con un problema di "calibrazione" dello "strumento" fotocopiato (in effetti: la fotocopia era stata eseguita con fattore di riduzione 98% …): non bisogna aspettarsi che uno strumento qualsiasi sia gia` perfettamente calibrato!

- **"outlier"**: la misura numero 7 (operatore GS) e` sensibilmente distante dalle altre: **possiamo escluderla solo su questa base?** La risposta, in linea generale, e` **NO**. Commenteremo ulteriormente possibili eccezioni e criteri di esclusione accettabili. In questo caso, data la differenza di circa 14 mm, e` probabile che l'operatore GS abbia usato in un paio di occasioni l'estremita` del regolo invece dello "zero": se questo fosse confermato, sarebbe preferibile escludere entrambe le misure di GS.

Metodo B:

- Tutti i valori misurati sono uguali, entro la costante di lettura di 1 mm, essendo il metodo piu` semplice e riproducibile.

Media e deviazione standard

N misure di x

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N\}$$

Media

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

Varianza

$$\boxed{V(x) = \frac{1}{N}\sum_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

Deviazione Standard

$$\boxed{\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}}$$

Esempio

operatore	Indice	xi(cm)	xi-xm(cm)	(xi-xm)^2	xi-xm'(cm)	(xi-xm')^2
SS	1	172.6	0.093	0.0087	0.015	0.0002
SS	2	172.5	-0.007	0.0000	-0.085	0.0072
LL	3	172.2	-0.307	0.0940	-0.385	0.1479
LL	4	172.7	0.193	0.0374	0.115	0.0133
SD	5	172.3	-0.207	0.0427	-0.285	0.0810
SD	6	172.6	0.093	0.0087	0.015	0.0002
GS	7	171.4	-1.107	1.2247		
GM	8	172.1	-0.407	0.1654	-0.485	0.2349
LB	9	172.8	0.293	0.0860	0.215	0.0464
LB	10	172.6	0.093	0.0087	0.015	0.0002
LL	11	172.8	0.293	0.0860	0.215	0.0464
LB	12	173.0	0.493	0.2434	0.415	0.1725
GS	13	172.6	0.093	0.0087		
LL	14	172.6	0.093	0.0087	0.015	0.0002
LL	15	172.8	0.293	0.0860	0.215	0.0464
	15	2587.6	0.000	2.1093		
	xm	172.51	0.00	0.1406		
			Var(x)	0.14		
			sigma	0.4		
not(GS)	13	2243.6			0.000	0.7969
	xm'	172.58			0.00	0.0613
					Var(x)	0.061
					sigma'	0.25

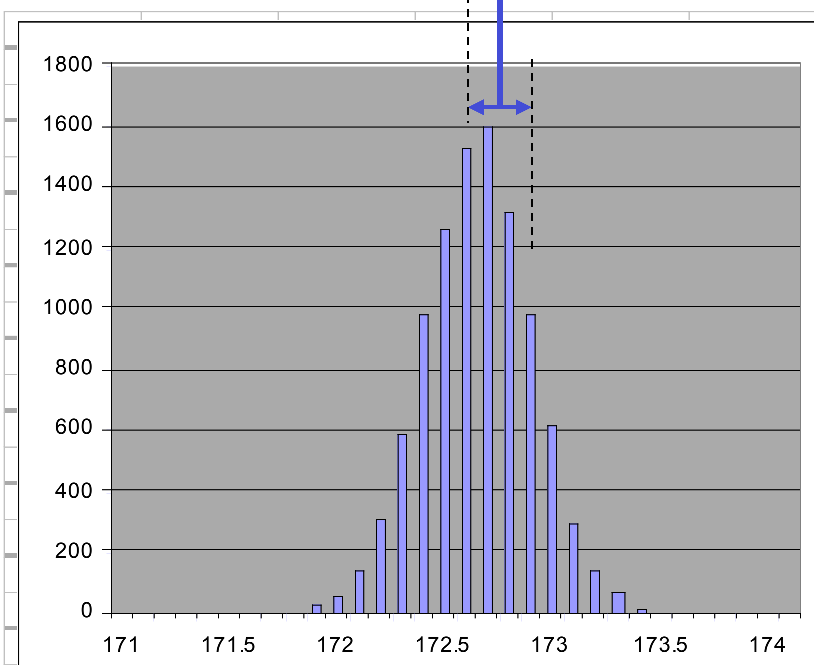
In grafico: per molte misure (simulate)

N = 10000 misure

$$\boxed{\bar{x} \rightarrow 172.60\,cm}$$

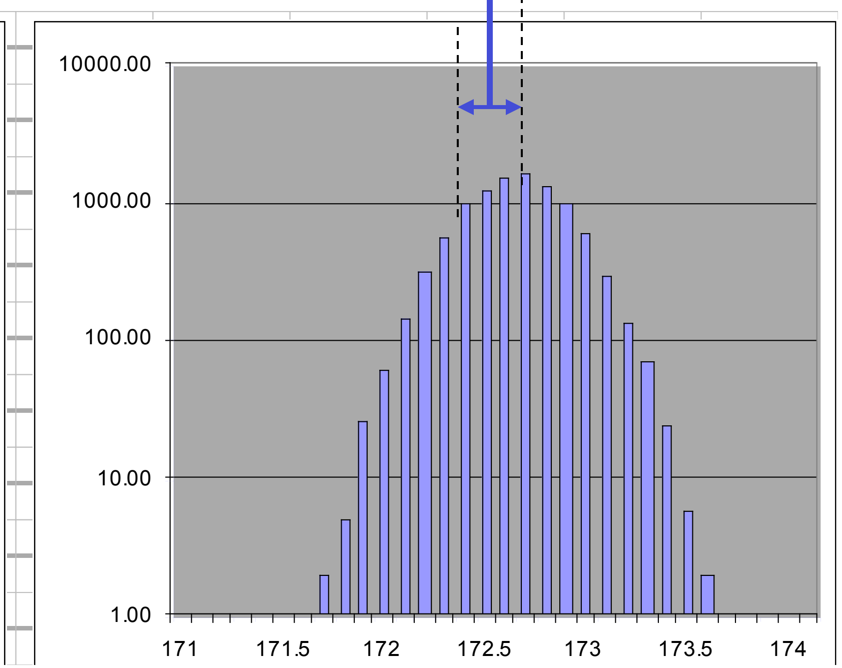
$$\boxed{\sigma_x \rightarrow 0.25\,cm}$$

Scala verticale lineare



x (cm)

Scala verticale logaritmica



x (cm)

Misure ripetute - interpretazione probabilistica - 1

Molto spesso (non sempre):

i risultati di misure ripetute hanno distribuzione di probabilita` gaussiana

Per il Teorema del Limite Centrale

La media di misure ripetute ha distribuzione di probabilita` gaussiana

Migliori stime per Media e Deviazione Standard:

"massima verosimiglianza" ⇒ "minimi quadrati" ⇒ ...(si dimostra)...

$$\left(\text{migliore stima per } X\right) = \hat{X} = \frac{\sum_i x_i}{N}$$

media

$$\left(\text{migliore stima per } \sigma_x\right) = \hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

deviazione standard

$$\left(\text{migliore stima per } \sigma_{\bar{x}}\right) = \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{N}}$$

deviazione standard della media

Misure ripetute – interpretazione probabilistica - 2

Date N misure ripetute di una grandezza x (assumendo distrib. Gauss.), e calcolate come specificato:

$$(\text{migliore stima per } X) = \hat{X}$$

$$(\text{migliore stima per } \sigma) = \hat{\sigma}$$

$$(\text{migliore stima per } \sigma_{\bar{x}}) = \hat{\sigma}_{\bar{x}}$$

Interpretazione "frequentista" dell'intervallo $\hat{X} - n\hat{\sigma} \le x \le \hat{X} + n\hat{\sigma}$

Livello di confidenza del 68% (95.3%, 99.7%) che una ulteriore **singola** misura cada nell'intervallo dato, con n = 1 (n =2, n = 3)

(cioe`: 68% delle ulteriori singole misure dovrebbero cadere nell'intervallo, etc.)

Interpretazione "frequentista" dell'intervallo $\hat{X} - n\hat{\sigma}_{\bar{x}} \le x \le \hat{X} + n\hat{\sigma}_{\bar{x}}$

Livello di confidenza del 68% (95.3%, 99.7%) che un ulteriore **esperimento equivalente** dia risultato nell'intervallo dato, con n = 1 (n =2, n = 3)

(cioe`: 68% degli esperimenti equivalenti darebbe valore medio nell'intervallo, etc.)

(o anche: 68% (…) probabilita` che il "valore vero" sia incluso nell'intervallo)

Pendolo: misure del periodo

- *Esempio di dati reali dal sensore di prossimità e processore Arduino: si possono analizzare con questi metodi !*