Assiomi che definiscono i numeri reali

L'insieme dei numeri reali si indica con il simbolo $\mathbb{R}$. In $\mathbb{R}$ sono definite due operazioni: somma (si indica con $+$) e prodotto (si indica con $\cdot$ e talvolta il simbolo viene omesso).

Le proprietà che definiscono $\mathbb{R}$ sono:

1. La somma e il prodotto sono associativi, cioè per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ vale:
$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$
2. La somma e il prodotto sono commutativi, cioè per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale:
$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a.$$
3. Esiste l'elemento neutro per la somma (si indica con 0) e l'elemento neutro del prodotto (si indica con 1). Per essi valgono le seguenti condizioni, per ogni $a \in \mathbb{R}$:
$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a.$$
4. Le due operazioni di somma e prodotto sono legate dalla seguente relazione: per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ vale:
$$a(b + c) = ab + ac.$$
5. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un elemento di $\mathbb{R}$, che si indica con $-a$ (detto l'opposto di a) tale che:
$$a + (-a) = 0.$$
Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, esiste un elemento in $\mathbb{R}$ che si indica con a^{-1} (o con $1/a$) tale che:
$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è poi definita una relazione d'ordine che si indica con $<$ e che soddisfa alle seguenti proprietà:

6. per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale una ed una sola delle seguenti condizioni:
$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$
7. (proprietà transitiva) Se vale $a < b$ e $b < c$, allora vale $a < c$.
8. Se vale $a < b$, allora, per ogni $c \in \mathbb{R}$ vale:
$$a + c < b + c.$$
9. Se $0 < a$ e $0 < b$, allora $0 < ab$.

Talvolta si scrive $a > b$ al posto di $b < a$. Il simbolo $a \leq b$ (o $a \geq b$) significa $a < b$ o $a = b$ (rispettivamente: $a > b$ o $a = b$). Gli elementi $a \in \mathbb{R}$ tali che $0 < a$ si dicono *positivi*, gli elementi di $\mathbb{R}$ tali che $a < 0$ si dicono *negativi*.

Definizione. Una *sezione* di $\mathbb{R}$ è costituita da due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, A e B, tali che

i. $A \cup B = \mathbb{R}$ e $A \cap B = \emptyset$;

ii. per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ si ha: $a < b$.

Se A, B sono una sezione di $\mathbb{R}$, un elemento $s \in \mathbb{R}$ si dice *elemento separatore* della sezione se per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ vale: $a \leq s \leq b$.

10. **Assioma di Dedekind.** Data una qualunque sezione A, B dell'insieme dei numeri reali, esiste ed è unico l'elemento separatore della sezione.