CORSO DI GEOMETRIA
SOTTOSPAZI VETTORIALI E COORDINATE
A.A. 2018/2019
PROF. VALENTINA BEORCHIA

INDICE

1. SOTTOSPAZI VETTORIALI

Definizione 1.1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Un sottoinsieme non vuoto $W \subseteq V$ si dice sottospazio vettoriale di V se valgono le seguenti condizioni:

- W1 per ogni $w_1 \in W$ e per ogni $w_2 \in W$ si ha
$$w_1 + w_2 \in W;$$

- W2 per ogni $W \in W$ e per ogni scalare $a \in \mathbb{K}$ si ha
$$a \cdot w \in W.$$

Osservazione 1.2. *Osserviamo che un sottospazio vettoriale W è a sua volta uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con le operazioni ereditate da V. È facile verificare che valgono gli assiomi $V1, \dots, V8$ di spazio vettoriale.*

Esempi 1.3. di sottospazi vettoriali

(1) Il sottoinsieme $W = V$ risulta in modo evidente un sottospazio vettoriale, detto sottospazio vettoriale improprio.

(2) Il sottoinsieme formato dal solo vettore nullo $\{0\} \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale, percheé verifica $W1$ e $W2$, e si chiama sottospazio vettoriale banale. Osserviamo che è il più piccolo sottospazio (e anche spazio) vettoriale.

(3) Sia V uno spaizo vettoriale non banale, e sia $v \in V$ un vettore non nullo: $v \neq 0$. Poniamo

$$\mathrm{Span}(v) := \{c \cdot v \mid c \in \mathbb{K}\},$$

consideriamo cioè il sottoinsieme di tutti i vettori proporzionali a v. Si verifica facilmente che $\mathrm{Span}(v)$ è un sottospazio vettoriale e viene chiamato retta vettoriale. Il vettore v viene chiamato generatore.

(4) Sia V uno spazio vettoriale non banale e siano $v, w \in V$ due vettori non nulli: $v \neq 0$, $w \neq 0$. Poniamo

$$\mathrm{Span}(v, w) := \{a \cdot v + b \cdot w \mid a \in \mathbb{K}, b \in \mathbb{K}\},$$

consideriamo cioè tutte le possibili somme di vettori proporzionali a v e w; tali espressioni vengono dette combinazioni lineari dei vettori v e w a coefficienti in $\mathbb{K}$. Si verifica facilmente che $\mathrm{Span}(v, w)$ è un sottospazio vettoriale e nel caso che w NON sia proporzionale a v, viene chiamato piano vettoriale. Nel caso che w sia invece proporzionale a v, si può verificare facilmente che vale

$$w = c \cdot v \Rightarrow \mathrm{Span}(v, w) = \mathrm{Span}(v) = \mathrm{Span}(w),$$

quindi si ottiene nuovamente una retta vettoriale.

(5) Più in generale, se $v_1, \ldots, v_k \in V$ è un numero finito di vettori di V, possiamo definire

$$\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k) := \{a_1 \cdot v_1 + \ldots a_k \cdot v_k \mid a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}\},$$

che risulta un sottospazio vettoriale.

(6) Nello spazio delle funzioni

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

il sottoinsieme delle funzioni continue

$$\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$$

è un sottospazio vettoriale perch´ la somma di funzioni continue e la moltiplicazione di uno scalare per una funzione continua sono ancora funzioni continue.

Analogamente si può verificare facilmente che il sottoinsieme delle funzioni derivabili con derivata continua

$$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ derivabile e } f' \text{ continua}\}$$

è un sottospazio vettoriale.

Inoltre si ha

$$\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

e $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ risulta anche sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(7) Il sottoisieme di $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ costituito dalle funzioni limitate:

$$\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f \text{ limitata}\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

è un sottospazio vettoriale. Ricordiamo la definizione: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ si dice limitata se $\exists\, M>0$, $M\in\mathbb{R}$, tale che $|f(r)|\le M$ per ogni $r\in\mathbb{R}$.

(8) Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in $\mathbb{R}$.
Il sottoinsieme dei polinomi di grado minore o uguale a un grado fissato $d\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{R}[x]_{\le d} : +\{p(x) \mid \deg p(x) \le d\}$$

risulta un sottospazio vettoriale.

Esempi 1.4. di sottoinsiemi che NON sono sottospazi vettoriali

(1) La circonferenza

$$S := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + (x_2-1)^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

non è un sottospazio vettoriale; infatti, ad esempio

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in S, \text{ ma } -\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \notin S.$$

(2) In generale, ogni sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^n$ in generale non è un sottospazio vettoriale; infatti, la condizione $W2$ implica che i vettori di un sottospazio vettoriale possano assumere "lunghezze" (vedremo la definizione in seguito) arbitrariamente grandi.

(3) Le rette del piano che non passano per l'origine non sono sottospazi vettoriali, perché non contengono il vettore nullo.

(4) Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in $\mathbb{R}$.
Il sottoinsieme dei polinomi di grado uguale a un grado fissato $d\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{R}[x]_d : +\{p(x) \mid \deg p(x) = d\}$$

NON risulta un sottospazio vettoriale, perché non verifica la $W1$. Ad esempio, la somma dei due polinomi

$$x^d - 1, \quad -x^d + 3$$

non è un polinomio di grado d: $x^d - 1 + (-x^d + 3) = 2$, polinomio costante, di grado zero.

Proposition 1.5. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e siano*

$$U \subseteq V, \quad W \subseteq V$$

due suoi sottospazi vettoriali.

Allora l'intersezione

$$U \cap W \subseteq V$$

è ancora un sottospazio vettoriale.

Dimostrazione. Verifichiamo che vale la $W1$ per $U \cap W$:

siano $u_1, u_2 \in U \cap W \subseteq U$; siccome U è sottospazio vettoriale, si ha

$$u_1 + u_2 \in U.$$

Ma abbiamo anche $u_1, u_2 \in U \cap W \subseteq W$; siccome W è sottospazio vettoriale, si ha

$$u_1 + u_2 \in W.$$

Quindi $u_1 + u_2 \in U \cap W$.

Verifichaimo ora la $W2$: sia $u \in U \cap W$ e sia $c \in \mathbb{K}$; essendo $U \cap W \subseteq U$ ed essendo U sottospazio vettoriale, si ha

$$c \cdot u \in U.$$

Analogamente, essendo $U \cap W \subseteq W$ ed essendo W sottospazio vettoriale, si ha

$$c \cdot u \in W.$$

Concludiamo quindi nuovamente che $c \cdot u \in U \cap W$. $\square$

Osservazione 1.6. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e siano*

$$U \subseteq V, \quad W \subseteq V$$

due suoi sottospazi vettoriali.

In generale l'unione

$$U \cup W$$

non è un sottospazio vettoriale.

Infatti abbiamo un controesempio: si $V = \mathbb{R}^2$ e siano

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \{a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\},$$

e

$$W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \{b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

Osserviamo che i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U \cup W,$$

ma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U \cup W.$$

Infatti, si ha $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U$ *perché non è del tipo* $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ *per alcun* $a \in \mathbb{R}$*. Inoltre,* $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W$ *perché non è del tipo* $\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}$ *per alcun* $b \in \mathbb{R}$*.*

Ci chiediamo allora quale sia il più piccolo sottospazio vettoriale contenente due dati sottospazi. Abbiamo la seguente:

Definizione 1.7. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e siano

$$U \subseteq V, \quad W \subseteq V$$

due suoi sottospazi vettoriali. Il sottospazio vettoriale somma $U + W$ è così definito:

$$U + V := \{v \in V \mid \exists u \in U, \exists w \in W, \text{ tali che } v = u + w\},$$

è dato cioè da tutte le possibili somme di vettori di U con vettori di W.

Lemma 1.8. *Il sottospazio somma* $U + W \subseteq V$ *è un sottospazio vettoriale.*

Inoltre, $U + W$ *è il più piccolo sottospazio vettoriale contenente* $U \cup W$*.*

Dimostrazione. Esercizio. □

2. Sistemi di riferimento e coordinate di vettori liberi

Under construction

Proposition 2.1. *Siano*

$$\vec{i} = [\vec{OA_1}], \qquad \vec{j} = [\vec{OA_2}]$$

due vettori non proporzionali del piano dei vettori liberi $\mathcal{V}^2$*.*

Allora per ogni vettore libero $\vec{v} = [\vec{OP}]$*, esiste un'unica coppia di numeri reali* $x_1 \in \mathbb{R}$ *e* $x_2 \in \mathbb{R}$ *tali che valga*

$$\vec{v} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}.$$

Definizione 2.2. Un insieme di vettori del piano formato da due vettori non nulli e non proporzionali

$$\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$$

si chiama base di $\mathcal{V}^2$.

Definizione 2.3. Fissato una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{V}^2$, definiamo la funzione,

$$F_{\mathcal{B}} : \mathcal{V}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F_{\mathcal{B}} : \vec{v} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

La coppia $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ viene chiamata coordinate del vettore $\vec{v}$ nella base $\mathcal{B}$.

Osservazione 2.4. *Osserviamo che se consideriamo una base $\mathcal{B}'$ diversa, la funzione associata $F_{\mathcal{B}'}$ è diversa.*

Teorema 2.5. *Per ogni scelta di una base $\mathcal{B}$, la funzione $F_{\mathcal{B}}$ è biiettiva.*

Inoltre, la funzione $F_{\mathcal{B}}$ preserva la somma di vettori e la moltiplicazione per scalari, cioè per ogni $v, v_1, v_2 \in \mathcal{V}^2$ e per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$F_{\mathcal{B}}(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = F_{\mathcal{B}}(\vec{v_1}) + F_{\mathcal{B}}(\vec{v_2}),$$
$$F_{\mathcal{B}}(a \cdot \vec{v}) = a \cdot F_{\mathcal{B}}(\vec{v}).$$

Proposition 2.6. *Siano*

$$\vec{i} = [\vec{OA_1}], \qquad \vec{j} = [\vec{OA_2}]$$

due vettori non proporzionali del piano dei vettori liberi $\mathcal{V}^2$, e sia

$$\vec{k} \notin \operatorname{Span}(\vec{i}, \vec{j}).$$

Allora per ogni vettore libero $\vec{v} = [\vec{OP}] \in \mathcal{V}^3$, esiste un'unica terna di numeri reali $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$ e $x_3 \in \mathbb{R}$ tali che valga

$$\vec{v} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}.$$

Definizione 2.7. Un insieme di vettori del piano formato da tre vettori scelti come nella Proposizione precedente

$$\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

si chiama base di $\mathcal{V}^3$.

Definizione 2.8. Fissato una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{V}^3$, definiamo la funzione

$$F_{\mathcal{B}} : \mathcal{V}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad F_{\mathcal{B}} : \vec{v} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

La terna $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ viene chiamata coordinate del vettore $\vec{v}$ nella base $\mathcal{B}$.

Osservazione 2.9. *Osservaimo che se consideriamo una base $\mathcal{B}'$ diversa, la funzione associata $F_{\mathcal{B}'}$ è diversa.*

Teorema 2.10. *Per ogni scelta di una base $\mathcal{B}$, la funzione $F_{\mathcal{B}}$ è biiettiva.*

Inoltre, la funzione $F_{\mathcal{B}}$ preserva la somma di vettori e la moltiplicazione per scalari, cioè per ogni $v, v_1, v_2 \in \mathcal{V}^2$ e per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$F_{\mathcal{B}}(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = F_{\mathcal{B}}(\vec{v_1}) + F_{\mathcal{B}}(\vec{v_2}),$$
$$F_{\mathcal{B}}(a \cdot \vec{v}) = a \cdot F_{\mathcal{B}}(\vec{v}).$$

Osservazione 2.11. *Vedremo che la funzione $F_{\mathcal{B}}$ è un caso particolare di funzione lineare. Inoltre, essendo biiettiva, risulta anche un isomorfismo di spazi vettoriali, vedremo di più in seguito.*