

Esercizi di Geometria
Ingegneria Industriale e Navale
2018/2019
quarto foglio

October 11, 2018

1. Si dimostri che se una matrice quadrata $N \in M_n(\mathbb{K})$ è nilpotente, cioè esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $N^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, allora N non è invertibile.

Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice *unipotente* se una sua potenza verifica

$$A^k = I_n, \text{ per un opportuno } k \in \mathbb{N}.$$

Si dimostri che se A è unipotente, allora A è invertibile.

2. Sia $D \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata *diagonale*, cioè del tipo

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che D è invertibile se e solo se

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} \neq 0.$$

3. Sia $A \cdot X = 0$ un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite a coefficienti in un campo \mathbb{K} . Si dimostri che se $m < n$, allora il sistema ammette almeno una soluzione non banale.

4. Si dica per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 & = & 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 6 \\ 3x_1 - 5x_2 & = & 7 \\ x_1 + 5x_3 & = & t. \end{cases}$$

5. Per ogni valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ si determini l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + (a - 1)x_2 + 2x_3 & = & 5 \\ x_1 + ax_2 + (2 - a)x_3 & = & 4 \\ 3x_1 - 5x_2 & = & 7 \\ x_1 + a^2x_3 & = & 5. \end{cases}$$

6. Si dica se il seguente sistema lineare di ordine 4 è compatibile, e nel caso affermativo se ne determini l'insieme delle soluzioni reali:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 & = & 7 \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 & = & 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 & = & -2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 & = & -2. \end{cases}$$