Determinante

Un determinante è un assetto di numeri disposti come una matrice quadrata, che può essere valutato con un valore numerico definito.

Un determinante viene scritto come una matrice tra linee verticali, anziché tra parentesi quadre; per esempio, un determinante di terzo ordine è

$$|\mathbf{D}| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Con determinante di una matrice quadrata si intende da un lato l'assetto quadrato dei numeri della matrice, dall'altra la valutazione numerica del determinante.

Dal determinante possono poi essere estratti dei *minori*, intendendo con questa espressione ogni assetto quadrato risultante dalla cancellazione di *n* righe e *n* colonne.

Un *primo minore* si ha quando si cancella una riga e una colonna.

In un determinante 3x3 si hanno 9 primi minori, perché per ognuna delle tre righe si possono cancellare tre colonne.

Si hanno poi secondi minori, terzi minori, e così via.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Il calcolo del valore numerico di un determinante è sempre più indaginoso con l'aumentare dell'ordine della matrice.

Come principio generale possiamo dire che esso si ottiene con una somma algebrica di prodotti ottenuti moltiplicando ogni elemento con ogni altro elemento appartenente a colonne e righe diverse.

Ciò equivale a dire che i prodotti sono uguali alle permutazioni dell'ordine della matrice, e cioè a n!.

Così, una matrice di secondo ordine avrà due prodotti, una di terz'ordine sei, una di quarto 24, e così via.

Per esempio, il valore del determinante di una matrice di ordine 3x3 è dato da

$$|\mathbf{D}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Il segno degli addendi si ricava contando quanti spostamenti tra gli addendi sarebbero necessari se li si volesse ordinare per riga.

Se gli spostamenti sono in numero pari (0 compreso), il segno è positivo, se dispari, negativo.

Esclusivamente per le matrici di ordine 3x3 si può ricorrere ad un metodo mnemonico per scrivere il determinante, noto come regola di Sarrus .

Ossia, riportando le prime due colonne di **D** alla destra della matrice

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccc} - & - & - \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Complessivamente, per un **matrice 2×2**:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{D}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Esercizi

Sviluppare le seguenti sommatorie:

$$\sum_{i=1}^{n} (kX_i + jY_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - cY_i)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \frac{X_i}{n}\right)^2$$

Considerata la tabella a destra che contiene le misure X_{ij} di n = 6 soggetti sottoposti a j = 2 condizioni sperimentali, calcolate

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n} X_{ij} \qquad \sum_{j=1}^{1}\sum_{i=1}^{n} X_{ij}$$

A	B
3	4
2	5
4	4
6	3
12	2
1	1

Dati i vettori

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

eseguire i seguenti prodotti e scriverli in forma di sommatoria: **a’a**, **a’b**, **a’1**

Calcolare il determinante di:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \; b) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(Suggerimento, visualizzate il problema con Excel)

Calcoli alla Barriera (Alessandro Logar)

Per passare il tempo presso la Barriera, i Guardiani della Notte fanno calcoli lunghissimi per mantenere il cervello riscaldato. Ad esempio, Sam scrive numeri in sequenza e somma la sequenza ottenuta. Oggi scrive righe di ventuno numeri: nella prima riga scrive due 1, poi 2, 3, ecc. fino a 20; nella seconda riga scrive 1, poi due 2, quindi 3, 4, ecc. fino a 20; nella terza riga, scrive 1, 2, due 3, poi 4, 5, ecc. fino a 20; e continua così fino a scrivere una riga con 1, 2, ecc. fino a 19, finendo con due 20. Infine somma tutti i numeri scritti. Che risultato ottiene?