

Esercizi di Geometria
Ingegneria Industriale e Navale
2018/2019
quinto foglio

October 16, 2018

1. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^n$, e siano

$$v_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}, \dots, v_s = \begin{pmatrix} p_{1s} \\ p_{2s} \\ \vdots \\ p_{ns} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

s vettori. Si dimostri che v_1, \dots, v_s sono linearmente dipendenti se e solo se il sistema lineare omogeneo

$$AX = 0, \quad A = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{ns} \end{pmatrix}$$

ammette una soluzione NON BANALE.

2. Si determini se i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

siano linearmente dipendenti o linearmente indipendenti.

3. Si determini se i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

siano linearmente dipendenti o linearmente indipendenti.

4. Si determinino i valori del parametro t per cui i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

risultano linearmente indipendenti.

5. Si dica se i seguenti insiemi di vettori di \mathbb{R}^2 formano un sistema di generatori per \mathbb{R}^2 :

$$\mathcal{G} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{I} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Inoltre, si esprimano in tutti i casi affermativi i seguenti vettori come combinazione lineare dei generatori:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. Si dimostri che lo spazio vettoriale dei polinomi

$$\mathbb{R}[x]$$

non ammette un insieme finito di generatori.

7. Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} , e siano v_1, v_2 due vettori linearmente indipendenti di V . Si dimostri che $v_1 + v_2, v_1 - v_2$ sono ancora linearmente indipendenti.