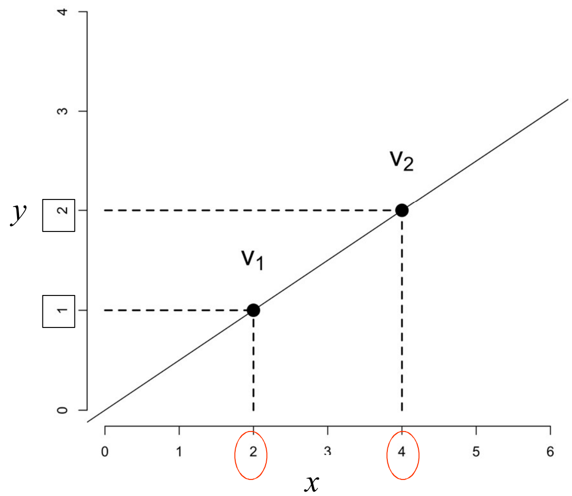
Vettori Collinearità

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ \boxed{1} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ \boxed{2} \end{bmatrix}$$

quindi, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$

- stanno sulla stessa linea
- la relazione tra le variabili x e y viene mantenuta:



Due vettori multipli scalari uno dell'altro sono detti *collineari*.

Vettori Collinearità

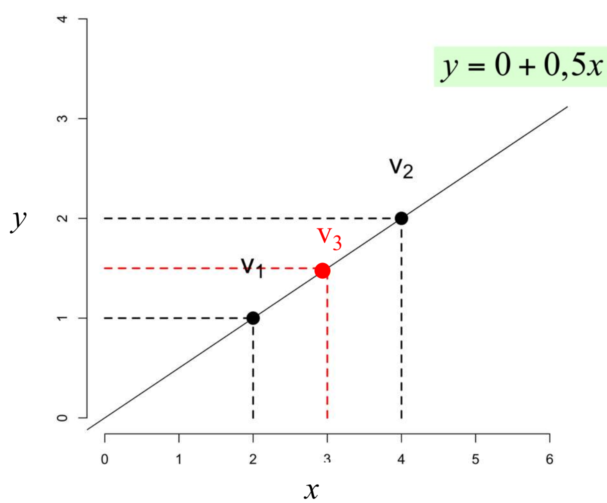
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ 0 + 0{,}5 \times 2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{4} \\ 0 + 0{,}5 \times 4 \end{bmatrix}$$

quindi, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}.$$

$$y = \frac{1}{2}x$$



Due vettori multipli scalari uno dell'altro sono detti *collineari*.

Vettori Collinearità

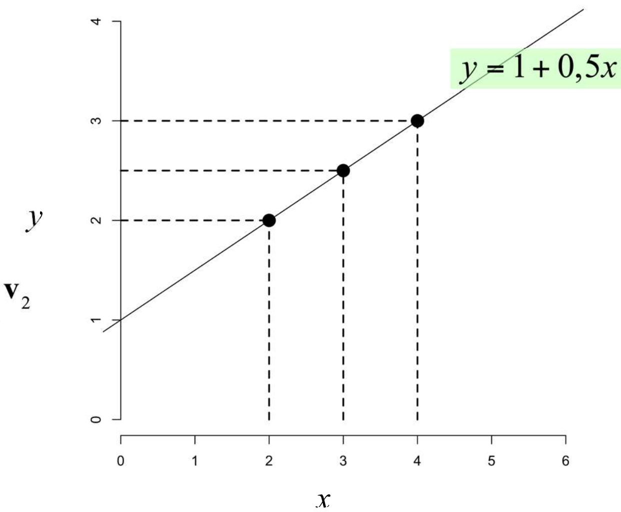
$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} \\ 3 \end{bmatrix}$$

quindi, $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{v_1} + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}.$$

$$y = 1 + \frac{1}{2}x$$



Due vettori multipli scalari uno dell'altro sono detti *collineari*.

Vettori

- In generale, una combinazione lineare di vettori è la somma di multipli scalari di vettori.
- Dati allora una serie di vettori $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v}_p$ e una serie di scalari (o *costanti*) c_1, c_2, ..., c_p, la **sommatoria** dei prodotti $c_i\mathbf{v}_j$ è il vettore **y,** *combinazione lineare* dei $\mathbf{v}_j$**:**

$$\sum_{i=1}^{p} c_i \mathbf{v_i} = \mathbf{y}$$

- si dice che **y** è ***linearmente dipendente*** dai p vettori considerati.
- Formalmente **y** è linearmente dipendente da $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v}_p$ se vale per qualche insieme di coefficienti c_i**:**

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \ldots + c_p\mathbf{v_p}.$$

Esercizi

Dati i vettori $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ eseguire le seguenti operazioni:

1. disegnare i vettori **v** e **w** sul diagramma cartesiano;
2. combinare linearmente i due vettori calcolando il vettore medio, disegnandolo nel diagramma;
3. utilizzando gli scalari $c_1 = 1$ e $c_2 = 4$, ottenere il vettore **y** linearmente dipendente da **v** e **w**.

Rango di una matrice

La determinazione del rango di una matrice ha un'importanza fondamentale.

Premettiamo che una matrice che ha determinante 0 è detta *singolare*.

Peraltro i minori di una matrice singolare possono avere determinante diverso da 0, ed essere quindi non singolari.

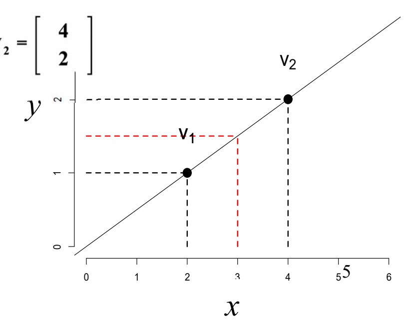
Il rango di una matrice è l'ordine del minore di rango più elevato della matrice con determinante diverso da 0 (i.e., *massimo numero di colonne (o righe) linearmente indipendenti*).

Prendiamo i nostri vettori *collineari* $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$; $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$

$$\underset{2\times 2}{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{M}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0.$$

il rango di **M** è 1



Rango di una matrice

Consideriamo ad esempio questo determinante:

$$|\mathbf{D}| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 36 - 4 - 36 - 6 = 0.$$

La matrice è evidentemente singolare
Il primo minore, di ordine 2×2, è però $-1 \neq 0$.
La matrice ha quindi rango 2.

6

Prodotto esterno di un vettore

Abbiamo visto che premoltiplicando ad un vettore un vettore trasposto si ottiene uno scalare (prodotto interno o scalare).

Si dirà invece *prodotto esterno* il prodotto **u·v´**.

Tale prodotto seguirà la regola dei *prodotti tra due matrici*, dove la prima ha una sola colonna, e la seconda una sola riga.

Ne risulterà una matrice quadrata, con un numero di righe e di colonne pari al numero dei componenti di ogni vettore:

$$\underset{3\times1}{\mathbf{u}} \cdot \underset{1\times3}{\mathbf{v}'} = \underset{3\times3}{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & a_1 \cdot b_3 \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & a_2 \cdot b_3 \\ a_3 \cdot b_1 & a_3 \cdot b_2 & a_3 \cdot b_3 \end{bmatrix}$$

7

Matrici inverse

Il calcolo delle matrici inverse è abbastanza indaginoso.

Un caso semplice è l'inversa di una matrice quadrata A, di ordine 2: risulta chiaro che una matrice quadrata ammette l'inversa se e solo se il determinante non è nullo (|A|≠0)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Da cui

$$\mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da - bc & bd - bd \\ -ac + ac & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{ad-bc} \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Esercizi

Date $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$,

verificare le seguenti proprietà:

(a) SOMMA

Commutativa: $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;

Associativa: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$

(b) PRODOTTO

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{BC} \neq \mathbf{CB} \\ \mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A} \\ \mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \\ (\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A} \end{array}\right\} \text{(provare a cambiare le matrici)}$$

(c) INVERSA

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} \\ (\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})' \\ \left|\mathbf{A}^{-1}\right| = 1/\left|\mathbf{A}\right| \end{array}\right\} \text{(provare con tutte e tre le matrici)}$$

Calcolare $\left|\mathbf{C}_{i1} \cdot \mathbf{A}'_{i2}\right|, \left|\mathbf{C}_{i1} \cdot \mathbf{A}'_{i1}\right|, \left|\mathbf{C}_{i1} \cdot \mathbf{C}'_{i1}\right|$ e $\left|\mathbf{B}_{i2} \cdot \mathbf{B}'_{i1}\right|$.

9

Autovalori e autovettori

$$\mathbf{Wv} = \lambda\mathbf{v}$$

In questo caso, lo scalare λ è detto *autovalore*, o *valore caratteristico*, o *eigenvalue,* e **v** *autovettore,* o *vettore caratteristico*, o *eigenvector*.

L'autovalore di una matrice gode della seguente proprietà:

$$|\mathbf{W} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

10

Data la matrice **W**

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}75 \\ 0{,}75 & 1 \end{bmatrix}$$

Imponiamo la seguente equivalenza

$$|\mathbf{W} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

$$\left| \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0{,}75 \\ 0{,}75 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}}_{\lambda\mathbf{I}} \right| = 0$$

Risolvendo il calcolo del determinante, otteniamo una equazione quadratica in λ.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0{,}75 \\ 0{,}75 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

11

$$(1-\lambda)^2-(0{,}75^2)=0$$

$$\lambda^2-2\lambda+0{,}4375=0 \qquad ax^2+bx+c=0$$

Con soluzione duplice o doppia ($b^2 - 4ac = 0$)

$$\lambda_1=\frac{2+\sqrt{4-1{,}75}}{2}=1{,}75 \qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\lambda_1=\frac{2-\sqrt{4-1{,}75}}{2}=0{,}25$$

12

Gli autovettori relativi agli autovalori si trovano risolvendo l'equazione vettoriale

$$\mathbf{Wv}=\lambda\mathbf{v}$$

semplificata in:

$$\mathbf{IWv}-\mathbf{I}\lambda\mathbf{v}=\mathbf{0}$$

$$(\mathbf{W}-\lambda\mathbf{I}\ )\mathbf{v}=\mathbf{0}$$

In modo esteso, per un generico λ, la scriviamo come

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1-\lambda & 0{,}75\\ 0{,}75 & 1-\lambda\end{bmatrix}}_{\mathbf{W}-\lambda\mathbf{I}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}}_{\mathbf{v}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

13

Per $\lambda_1 = 1{,}75$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 0{,}75 \\ 0{,}75 & 1-\lambda_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}-\lambda_1\mathbf{I}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

abbiamo quindi il sistema omogeneo

$$\begin{cases} (1-1{,}75)x + 0{,}75y = 0 \\ 0{,}75x + (1-1{,}75)y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0{,}75x = -0{,}75y \\ 0{,}75x = 0{,}75y \end{cases}$$

con infinite soluzioni di forma

$x = y,$ che possiamo scrivere come $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x$

14

Ad esempio, per x= 0,7071068

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}7071068 \\ 0{,}7071068 \end{bmatrix};$$

così da avere una **lunghezza dell'autovettore** unitaria

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt[2]{0{,}7071068^2 + 0{,}7071068^2} = 1$$

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt[2]{0{,}5 + 0{,}5} = 1$$

15

Per $\lambda_2 = 0{,}25$ abbiamo che

$$\begin{cases} 0{,}75x + 0{,}75y = 0 \\ 0{,}75x + 0{,}75y = 0 \end{cases}$$

Con soluzioni

$$x = -y$$

di forma $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} x$

Ad esempio

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}7071068 \\ 0{,}7071068 \end{bmatrix};$$

Così da avere

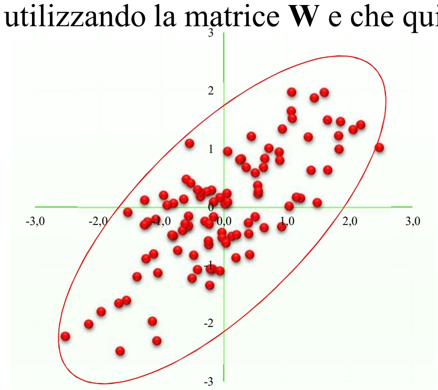
$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt[2]{(-0{,}7071068)^2 + 0{,}7071068^2} = 1$$

16

Interpretazione geometrica

premessa

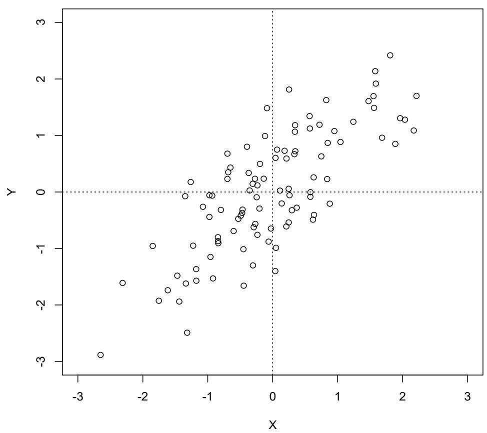
Si considerino i seguenti dati (foglio Excel) generati con il calcolatore utilizzando la matrice **W** e che qui chiameremo opportunamente matrice (di correlazione) R:



$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}75 \\ 0{,}75 & 1 \end{bmatrix}$$

17

Autovalori e autovettori



Alla nozione di *autovalore* e *autovettore* verrà fornita qui un'interpretazione geometrica:

-**<u>Consideriamo due variabili random generate mediante R:</u>**

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,75 \\ 0,75 & 1 \end{bmatrix}$$

-**<u>e la loro possibile rappresentazione grafica.</u>**

Gli *autovalori* e *autovettori* di R sono:

$$\lambda_1 = 1,75;\ \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 0,7071068 \\ 0,7071068 \end{bmatrix};\ \lambda_2 = 0,25;\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0,7071068 \\ 0,7071068 \end{bmatrix}$$

Autovalori e autovettori

Le due proprietà $\mathbf{Wv} = \lambda\mathbf{v};\ |\mathbf{W} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ si dimostrano rispettate:

$$\mathbf{Rv}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,75 \\ 0,75 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,7071068 \\ 0,7071068 \end{bmatrix} = 1,75\begin{bmatrix} 0,7071068 \\ 0,7071068 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,7071068 \times (1 + 0,75) \\ 0,7071068 \times (0,75 + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7071068 \times 1,75 \\ 0,7071068 \times 1,75 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{R} - \lambda_1\mathbf{I}| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} 1 - 1,75 & 0,75 \\ 0,75 & 1 - 1,75 \end{bmatrix}\right| =$$

$$= (-0,75)^2 - 0,75^2 = 0$$

$$\mathbf{Rv}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,75 \\ 0,75 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0,7071068 \\ 0,7071068 \end{bmatrix} = 0,25\begin{bmatrix} -0,7071068 \\ 0,7071068 \end{bmatrix}$$

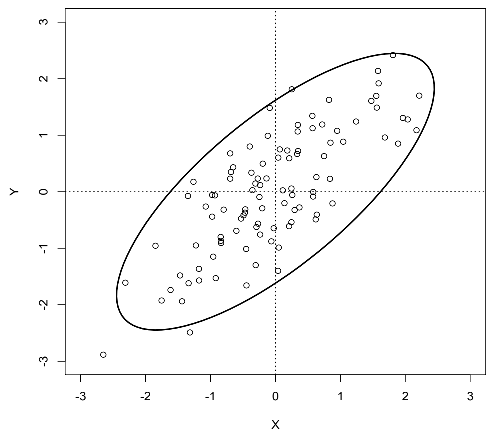
$$\begin{bmatrix} 0,7071068 \times (-1\ +\ 0,75) \\ 0,7071068 \times (-0,75\ +\ 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7071068 \times (-0,25) \\ 0,7071068 \times 0,25 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{R} - \lambda_2\mathbf{I}| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} 1 - 0,25 & 0,75 \\ 0,75 & 1 - 0,25 \end{bmatrix}\right| =$$

$$= (0,75)^2 - 0,75^2 = 0$$

Autovalori e autovettori



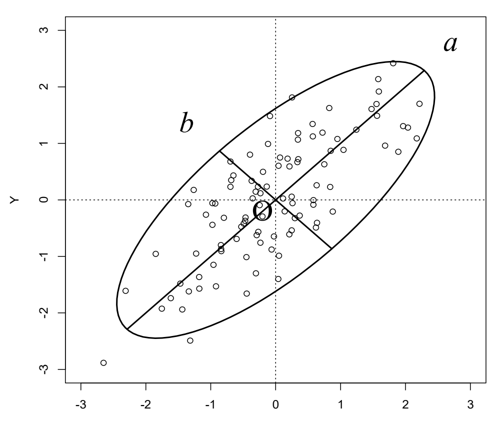
Alla nozione di *autovalore* e *autovettore* verrà fornita qui un'interpretazione geometrica:

- **<u>è possibile racchiudere le osservazioni con un'ellisse</u>:**

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,75 \\ 0,75 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 1,75;\ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0,7071068 \\ 0,7071068 \end{bmatrix};\ \lambda_2 = 0,25;\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0,7071068 \\ 0,7071068 \end{bmatrix}$$

20

Autovalori e autovettori



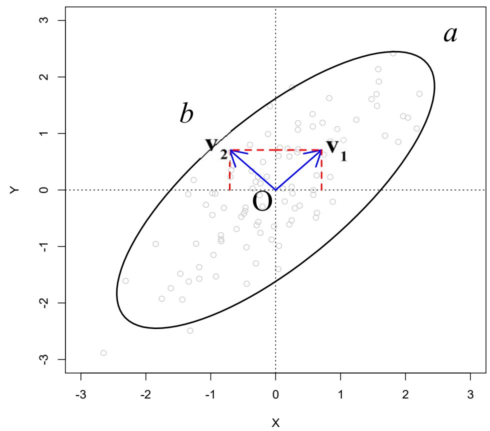
Alla nozione di *autovalore* e *autovettore* verrà fornita qui un'interpretazione geometrica:

- è possibile racchiudere le osservazioni con un'ellisse:
- **<u>laddove *a* è il semiasse maggiore e *b* è il semiasse minore</u>.**

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,75 \\ 0,75 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 1,75;\ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0,7071068 \\ 0,7071068 \end{bmatrix};\ \lambda_2 = 0,25;\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0,7071068 \\ 0,7071068 \end{bmatrix}$$

21

Autovalori e autovettori



Alla nozione di *autovalore* e *autovettore* verrà fornita qui un'interpretazione geometrica:

- la direzione del semiasse maggiore è determinata dal primo *autovettore*

$$\mathbf{v}_1' = \begin{bmatrix} 0,7071068 & 0,7071068 \end{bmatrix}$$

con pendenza uguale a

$$(0,7071068)/(0,7071068) = 1$$

- la direzione del semiasse minore è determinata dal secondo *autovettore*

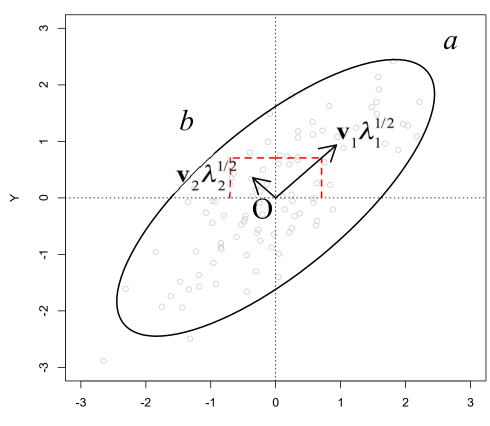
$$\mathbf{v}_2' = \begin{bmatrix} -0,7071068 & 0,7071068 \end{bmatrix}$$

con pendenza uguale a

$$(0,7071068)/(-0,7071068) = -1$$

22

Autovalori e autovettori



Alla nozione di *autovalore* e *autovettore* verrà fornita qui un'interpretazione geometrica:

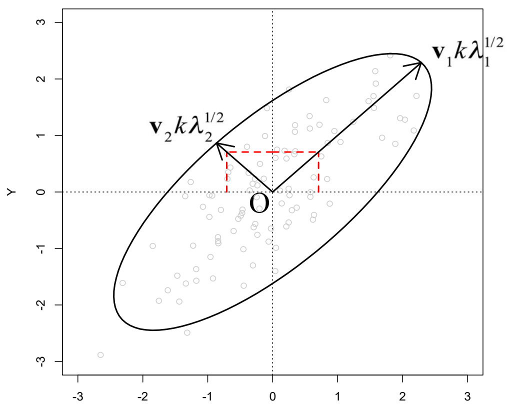
- la lunghezza dei semiassi maggiori e minori dell'ellisse sarà *proporzionale* alla radice quadrata degli *autovalori*:

$$\lambda_1^{1/2}\mathbf{v_1} = \sqrt{1,75}\begin{bmatrix}0,7071068\\0,7071068\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,9354143\\0,9354143\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2^{1/2}\mathbf{v_2} = \sqrt{0,25}\begin{bmatrix}-0,7071068\\0,7071068\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0,3535534\\0,3535534\end{bmatrix}$$

23

Autovalori e autovettori



$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}75 \\ 0{,}75 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{R}| = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}75 \\ 0{,}75 & 1 \end{vmatrix} = 1^2 - 0{,}75^2 = 0{,}4375$$

Alla nozione di *autovalore* e *autovettore* verrà fornita qui un'interpretazione geometrica:

-la lunghezza totale dei semiassi dell'ellisse si raggiunge moltiplicando i vettori per una costante *k*.

- il determinante di una matrice è il prodotto degli autovalori:

$$|\mathbf{R}| = \prod_{i=1}^{2} \lambda_i = 0{,}4375$$

- la traccia di una matrice (somma dei valori sulla diagonale) è uguale alla somma degli autovalori:

$$\mathbf{tr}(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i = 2$$

24

Autovalori e autovettori

Si noti che:

- l'area di un ellisse [(π/4)*ab*] è proporzionale al prodotto dei semiassi;

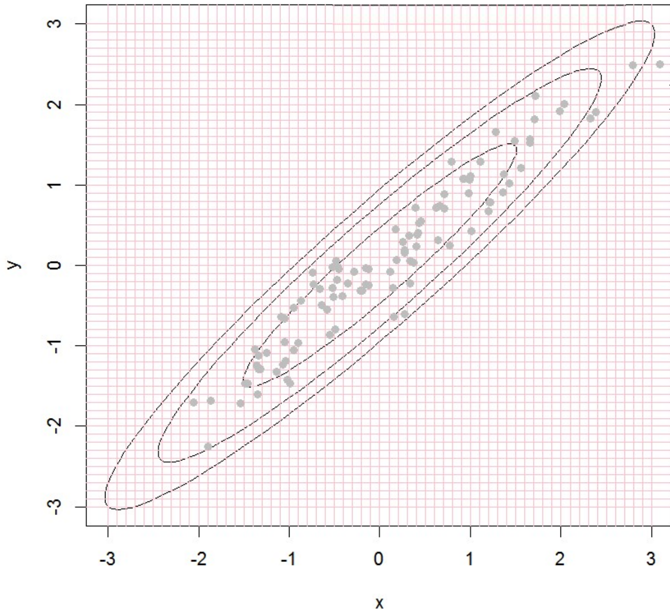
- i semiassi *a* e *b* dell'ellisse sono proporzionali alla radice quadrata degli *autovalori* della matrice;

- il determinante di una matrice è il prodotto degli *autovalori* della matrice:

- l'area dell'ellisse che contiene i dati è proporzionale al determinante della matrice di covarianza (correlazione).

25

ESERCIZI

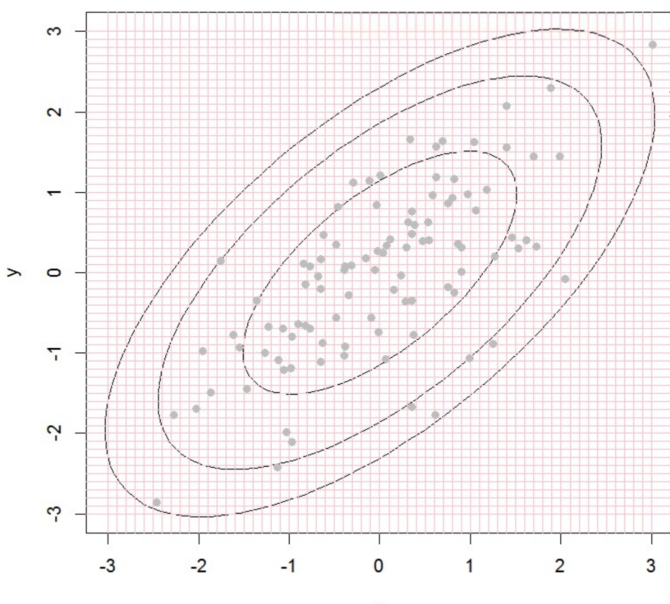


$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0{,}95 \\ 0{,}95 & 1 \end{bmatrix}$$

Estrarre gli autovalori e gli autovettori dalla matrice R e tracciare i semiassi (proporzionali)

26

ESERCIZI

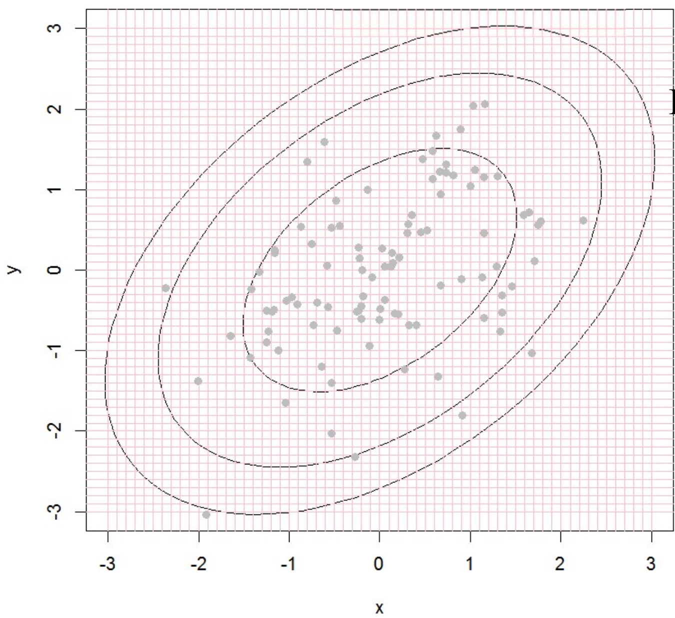


$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0{,}65 \\ 0{,}65 & 1 \end{bmatrix}$$

Estrarre gli autovalori e gli autovettori dalla matrice R e tracciare i semiassi (proporzionali)

27

ESERCIZI



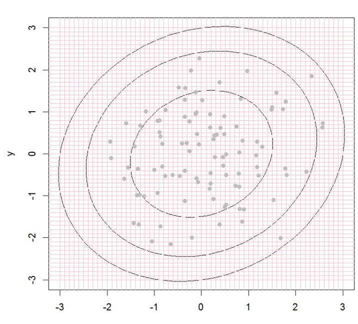
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}45 \\ 0{,}45 & 1 \end{bmatrix}$$

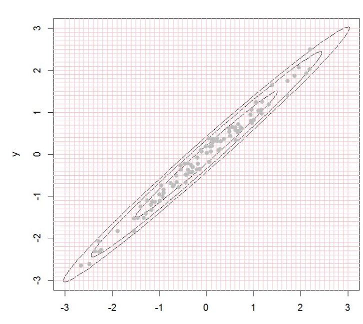
Estrarre gli autovalori e gli autovettori dalla matrice R e tracciare i semiassi (proporzionali)

28

Cosa osservate quando i valori fuori dalla diagonale tendono a zero?

Provate a scrivere la matrice **R** per questi due esempi, sapendo che l'elemento fuori dalla diagonale va da 0 a 1.





29